
Digitized by Google





VARIA OPERA MATHEMATICA

D. PETRI DE FERMAT, SENATORIS TOLOSANI.

Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum a plerisque doctissimis viris Gallicè, Latine, vel Italice, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.



TOLOSÆ,

Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.

M. DC. LXXIX.

Novo invento usi iterum expresserunt R. Friedlænder & Filius.
BEROLINI — MDCCCLXI.

CELSISSIMO

S. R. I. PRINCIPI

FERDINANDO

EPISCOPO PADERBORNENSI,

COADIVTORI MONASTERIENSI,

COMITI PYRMONTANO,

LIB. BARONI DE FURSTENBERG.

SAMVEL DE FERMAT S. P.

SI munus quod tibi, Celsissime Princeps, offero non respuas, grati simul animi & obsequii quodam erga te, ac pietatis officio erga Parentem fungi videbor: dum in illius operum Mathematicorum limine nomen statuo, quod injurias temporum & invidiæ morsus arcere possit. Quis enim unquam credat improbari quod tu semel probaveris, quem Arctoi syderis instar intuentur quicumque scientiarum pelagus sulcare cupiunt, mox tutius & tranquillius futurum, cùm fluctus omnino sedaverit lenior pacis aura quæ tandem spirare cœpit? Sic autem per omnes orbis literarii partes lucem spargis, ut te cuncti suspiciant & neminem despicias; ita multorum errorem Magnatum damnas qui veluti quodam summæ dignitatis privilegio sibi concessum existimant, ut non tantùm impune, verùm etiam splendidè possint esse indocti; & se contemnendos putent nisi Musas spernere audeant. Sed abundè tua probat authoritas nulli magis utiles esse literas, quàm ei qui, ùt decet, Pastor populorum esse velit, nulli plus gloriæ afferre: quia rarò conveniunt imperii comes sollicitudo, & aptus colendæ menti secessus. Idem profectò centrum ferè nunquam habent civilium curarum & sublimium disciplinarum circuli: in tanto negotiorum cir-

cuitu rectà ad doctrinæ culmen ascendere non minùs forsan difficile Politico videatur, quàm Geometræ curvas rectis æquare, cujus rei specimen exhibet hîc edita dissertatio. Superavit tamen omnes obices tua Celsitudo, tibique fidum in mediis tempestatibus portum condere potuisti, & egregiis plerisque scriptoribus quos tuarum fama virtutum ad Paderæ fontes allicit, ubi venam quovis latice puriorem nanciscuntur, ubi te præeunte citiùs discunt quò properandum sit, quàm si studiis in umbra educatis anxiè semotos calles investigarent. Longum scilicet iter est per præcepta, breve per exempla, brevissimum per exempla Principis viri, quem etiam avia peragrantem loca plurimi libenter sequi conantur; sed paucissimi sunt qui tuis inhærere vestigiis queant; & dum opias.

Voce ciere viros, Phœbumque accendere cantu,

*Vocis tuæ suavitas tuis non mediocriter votis obstat. Deterret nimirum qui sic hortatur; silere docet, qui tam doctè loquitur. Id ego experior quoties opera tua pervolvo, quæ mihi licet ignoto & immerenti mittere voluisti: illa semper, adulationis expers, cujus causas procul habeo, mirari simul & laudare gaudeo quæ vix quisquam imitari posse confidat. Monumentis enim Paderbornensibus, quæ tam munificè restaurans tam eleganter celebras, monumentum longè perennius exegisti: si Quinctilii Vari, cujus cladem cedro dignis carminibus memoras, Legiones Romæ reddi nequeunt, at saltem tui sermonis illecebris & venustate Vari vel Augusti sæculum ei reddere videris, Virgiliumque simul & Horatium ac utriusque præsidium & decus referre. Augurabatur olim lepidus Vates non defuturos Marones, quandiu sint Mæcenates, sed quidquid præclarum in Mæcenate & Marone fuit, in eodem pectore reperiri posse nemo speraverat, sive quòd nimia copia Poëtas inopes & steriles plerunque reddit (unde Theocritus * Diophanto fatetur artes excitari paupertate, quam laboris magistram vocat) sive quòd alienis carminibus ei non opus est qui suis satis oblectari potest, ut adoptivos liberos quærere non solet cui natura legitimam sobolem dedit. Verùm in te, Celsissime Princeps, collecta non sine stupore cernimus, quæ divisa tam illustres alios effecerunt; & tua singularis humanitas, quæ tot eximias dotes connectens, cœlestes gemmas auro inserere videtur, spondet à te benignè excipiendum, tuoque in sinu fovendum hunc ingenii paterni partum, qui suo defensore orbatus, ùt posthumus, tuo patrocinio indiget, quod venerabundus exposco.*

* Idyl. 16.



DE CELSISSIMO PRINCIPE

FERDINANDO FURSTENBERGIO, Episcopo Paderbornensi, &c.

OB AVREVM NVMISMA, IN QVO illius imago conspicitur, missum.


UREA Pierio quam culmine mittis imago
Quæ nostros ingressa lares fulgore replevit
Immeritamque manum, Phœbi ipsa referre videtur
Ora, solo qui cuncta fovet, nec florea tantum
Rura super lætus rutilat glebasque feraces,
Cernere sed sterilem non dedignatur arenam;
Sic hilares oculos simul & cum fronte serena
Innocuos mores insignis vultus adumbrat;
Sit tamen ars quamvis spectanda numismatis, illam
Effigiem superavit opus quodcunque Camænis
Sponte tuis fluxit dulci de fonte leporum:
Scilicet Aonij meliùs te vertice montis
Spirantem ostendunt Musæ, dum natus Olympo
Doctrinam pietate auges, castasque sorores
Ad superos tollens, dignoscis quam sit inane
Ornari ingenium, nimioque calescere motu,
Si vacuum æthereo pectus non uritur igne.
Luminibus quantis & quot virtutibus omnes
SUAVITER * alliciens animos, validique catenis
Eloquij blandus victor trahis! his ego sensi
Me placidè captum jampridem, nec tibi possim
Hoc magis addici, qui me devincit, honore.
At quas nunc grates referam? Te principe Vatum
Munera digna mihi Romanaque carmina desunt;
Carmina Mæcenas sed tu par ipse Maroni
Nostra nec expectas; nec vilia munera quæris.
Non eget exiguâ sublimis arundine laurus,
Et raucæ non vocis eget tua fama susurro;
Sat nitidis Latio quibus aurea redditur ætas
Eximias scriptis potuisti pandere dotes,
Purior illimi ceu splendens flumine solus,
Ut decet, ipse suis radijs se pingit Apollo.

* Illustrissimi Principis tessera SUAVITER & FORTITER.

DE PRINCIPIS EIUSDEM PRÆCLARO *Monumentorum Paderbornensium opere.*

DUM Paderæ fontes æterno carmine Princeps
Aonij celebrat spes columenque chori,
Ut superat quæ sic ponit monumenta, suisque
Altius ipse aliud tollit ad astra modis!
Hujus Cana fides ornat pia pectora, mentem
Lux Sophiæ, Latij priscus & ora lepor.
Amissas * his olim Aquilas quæ flevit in arvis,
Delicias illinc Roma decusque trahit.
Fernandi eloquium Tiberis miratur, & ævi
Immemor, Augusti sæcla redire putat.

* Natus est Illustris. Princeps in ea Germaniæ parte in qua cæsæ fuerunt Quinctilii Vari Legiones.

DE EODEM PRINCIPE QUI MIRANDIS *ingenii doctrinæque dotibus stemmatis ac dignitatum splendorem augens, pacem omnibus morum & facundiæ suavitate persuadere possit.*

ODE.

NUnc corda mulcens ô utinam Sacer
Notos recursans per fluvios Olor
Mox cogat infensos canorâ
Voce potens lituos silere;
Hic prima Pindi gloria cui favet
Phœbus, nitentem Lilia quem tegunt,
Quas ore non compescat iras
Pieriâ modulatus arte?
Ut cum querelis dulcisonis nemus
Vox blanda latè lusciniæ replet,
Discordis oblitæ susurri
Mille solent volucres tacere;
Non ille frustra sit patriæ datus
A quo feroces flecti animi queunt;
Martis nec incassum per arua
Threicius cecinit Sacerdos:
Orpheus parentem Calliopen colens
Lenire plectro quot didicit feras!
Sermone sic præstat domare
Pectora, quam superare ferro.



ERUDITO LECTORI.

NON te latet, Erudite Lector, opera Mathematica præfatione vix indigere: nam ut Paralogismi culpam frustrà longo sermone Geometra deprecari vellet, aut pro vera demonstratione falsam obtrudere; ita non opus est assensum solidæ rationis viribus debitum suppliciter efflagitare, quem adversarius videns sciensque, licet valdè reluctans, denegare non possit. Prætereà supervacaneum foret laudes Mathematum fusè celebrare, cùm hanc spartam tot egregij scriptores adornandam jampridem susceperint. Quis enim nescit Geometriam & uberes illius fructus ad cœlum evehi à Platone, qui non solùm eam divinitùs humanæ menti insitam, sed etiam ab ipso numine excoli putavit? nonne meritò Mathesis à Philone vocata fuit liberalium artium metropolis,quas,ubi desit illa,luminibus,& veluti manibus orbatas esse liquet? Unde à vero non aberrat qui ut manum instrumentum ante instrumenta, sic & Mathesin dici posse credit artem ante alias artes, cum illius terrâ marique,& bello ut pace,tam evidens utilitas sit; quod unus instar omnium docuit olim Archimedes, dum infirmus corpore sed invictus ingenio senex, obsidionis Syracusanæ pars maxima, patriæ vis summa fuit, Briareus & Centimanus à Romanis appellatus: Quamobrem admiratione perculsum Marcellum licet hostem ab eo tot damnis affectum ei tamen inimicum esse noluisse Livius tradit, sed propinquis inquisitis honori præsidioque nomen, ac memoriam tanti viri fuisse. Mathematicas deinde disciplinas ansas Philosophiæ videri quis diffiteatur? cum Philosophus quamvis abundè Logicæ versutijs & argutijs instructus, si lux mathematica non affulgeat in Physica comparari possit Polyphemo in spelunca occæcato, & muneris, quo frui potuit, usum nescienti, vini scilicet, cui præclarus non ita pridem Philosophus Geometriam similem dici posse arbitratus est, quod recens inflat, vetus oblectat & vires auget. At non istorum operum Authorem inflavit unquam Mathesis,& tot demonstrationes, dum ab ipso non sunt editæ, quibuslibet argumentis meliùs demonstrant eum ab ostentatione laudisque cupidine alienum fuisse. Quòd autem de illarum sorte sollicitus non fuit, ferè semper autographa nullo servato responsorum exemplari mittere solitus, parum abfuit quin hæc, quæ fortè non interitura credes, omninò extincta fuerint, antequam in publicam lucem prodirent. Hinc fit ut quia hæc sparsim disjecta colligere facile non fuit, fato posthumorum operum serò, pauciora, & minus culta typis edantur. Hinc etiam contingere poterit ut omnia quæ hîc occurrent tibi non videantur nova: sed quamvis alij de quibusdam rebus, quas hîc invenies, scripserint & lucubrationes suas priùs vulgaverint, non ideò minùs hæc inventa istorum operum Authori debentur, qui adeò fastûs, & invidiæ expers fuit, ut aliena suis sat aliunde notis immiscuisse credi non possit,qui sua vix sibi tribuebat. Ab eo, exempli causâ,libri duo Apollonij Pergæi de locis planis procul dubio restituti sunt, licet Franciscus Schooten Academiæ Lugduno Batavæ Professor illos à se restitutos asserat; nam sua typis mandavit Franciscus Schooten anno 1657. sed libros duos, qui hîc extant, Apollonij Pergæi de locis planis se vidisse Lutetiæ manuscriptos, nec non ad locos planos & solidos Isagogen,

testis omni exceptione major Herigonius asserit tomo 6. cursûs Mathematici editi anno 1634. Credere tamen, vt dixi, malim Batavum Professorem eâdem de re scripsisse, quàm ab eo, vel à quovis alio aliquid perpetratum esse suspicari quod ingenuum animum dedeceat, vel inverecundiam plagij probare possit. Verum in istis, ni fallor, operibus, de quibus te non ex parva mole judicaturum sat scio, occurret tibi non injucunda varietas, ut & in epistolis, quæ vel ab Authore, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris scriptæ fuerunt. Has inter sunt nonnullæ Pascalij in quibus ingenij non minùs tersi quàm perspicacis radios agnosces, quos ejusdem aliæ lucubrationes, & ipsæ satis exhibent Pascalij cogitationum reliquiæ: illud enim opus in quo *pendent opera interrupta*, multis eximium Matheseos circa res sacras specimen videtur, *æquataque machina cælo*. Quis autem ignorat qualis quantusque Geometra & quam insignis in Academia Parisiensi Professor fuerit Robervallius, cujus hîc aliquot epistolas legere poteris & perlegisse gaudebis? Eduntur hîc quoque nonnullæ Gallicè vel Italicè scriptæ à Kenelmo Digbæo, qui præter generis nobilitatem & honores gestos, non solùm ingenio doctrinâque, sed etiam pietate conspicuus fuit, ac veræ Religionis cultu, quam ut gladio, sic & calamo tueri conatus est, ut fidem facit aureus illius liber de veritate Catholicæ Religionis Anglicè scriptus. Illis epistolis additur una aut altera Frenicli, cujus miram Arithmetica problemata solvendi facilitatem à multis prædicatam, & ejusdem responsis confirmatam Analystæ norunt. Quas verò non adjecimus circà Cartesianam Dioptricam epistolas legere poteris in tertio volumine epistolarum Cartesij cujus stupendæ sagacitatis circà Geometriam admiratione se captum fatetur is etiam qui nonnunquam ab eo dissentit. Ut autem in varijs istis operibus, sic & in epistolis multa reperies quæ ad Geometriam, vel Analyticen pertinent aut numerorum arcana, de quibus si plura videre cupias, habes observationes ad Diophantum, cujus opera typis mandari curavi anno 1670. & Doctrinæ Analyticæ inventum novum collectum è variis epistolis D. Petri de Fermat ab insigni Geometra R. P. Jacobo de Billy S. J. Sacerdote. Est hîc præterea nonnihil circa Mechanicam & Geostaticam, nec non Dioptricam ac Physicam, circà quàm v. g. non contemnendam fore confido epistolam de proportione quâ gravia decidentia accelerantur, ad Gassendum, quæ ipsi Gassendo viro exquisitæ eruditionis, & candore ac moribus qui Christianum Philosophum decent, prædito non displicuit, ut ejus responso, licet brevi, satis patet. Sic etiam celebris Itali Geometræ Abbatis Bened. Castelli epistola probat ei non displicuisse quæ hîc scripta sunt circà motum gravium aut centrum gravitatis. Cæterùm in his Parentis mei operibus & epistolis quæ multas disputationes circà quæstiones arduas continent, & quibus duas addidimus criticis observationibus non spernendis refertas, nullam vocem quæ sit acerbior, nullum pervicacis controversiæ vel amarulentæ contentionis occurrere vestigium, poteris observare. Id innatam mansuetudinem Authoris arguit, qui nullâ contradicendi libidine veritatem quærens, illam ab alijs inveniri gaudebat & gratulabatur: qui secùs agunt eam ut juvenes proci colere videntur, dum sibi dumtaxat affulgere vellent quod diligunt; sed qui veritatem divino, ut par est, amore prosequuntur, ipsam omnibus innotescere cupiunt, suamque felicitatem augeri putant, cum ejusdem plurimi fiunt participes. Epistolas verò ad Authorem scriptas, quæ hîc extant, ut nactus sum, edendas ingenuè existimavi, nullomodò minuere sed augere cupiens tantorum virorum famam, quorum alia responsa, nondum prælo commissa, si mihi suppeterent, ut harum disputationum seriem edere non pigeret. Ex istis autem operibus, Erudite Lector, fructûs, ni fallor, & voluptatis non parùm percipere poteris & si quid incuriâ Typographorum erratum sit, illud suppleas aut ignoscas quæso.

Schemata suis locis in toto opere, ut in illius parte, reperirentur, nisi defuisset sculptor ligni notis Geometricis incidendi peritus; sed figuræ quæ cum textu editæ non fuerunt, ad libri calcem sunt rejectæ, numeris paginarum, ad quas referuntur, appositis, quod semel monuisse sufficiat.

ELOGE DE MONSIEUR DE FERMAT, Conseiller au Parlement de Tolose.

Du Journal des Sçavans, du Lundy 9. Fevrier 1665.

ON a appris icy avec beaucoup de douleur la mort de M. de Fermat Conseiller au Parlement de Tolose. C'estoit un des plus beaux esprits de ce siecle, & un genie si universel & d'une estenduë si vaste, que si tous les sçavans n'avoient rendu témoignage de son merite extraordinaire, on auroit de la peine à croire toutes les choses qu'on en doit dire, pour ne rien retrancher de ses loüanges.

Il avoit toûjours entretenu une correspondance tres-particuliere avec Messieurs Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Hugens, &c. & avec la pluspart des grands Geometres d'Angleterre & d'Italie. Mais il avoit lié une amitié si étroite avec M. de Carcavi, pendant qu'ils estoient confreres dans le Parlement de Tolose, que comme il a esté le confident de ses estudes, il est encore aujourd'huy le depositaire de tous ses beaux écrits.

Mais parce que ce Journal est principalement pour faire connoître par leurs ouvrages les personnes qui se sont renduës celebres dans la republique des lettres; on se contentera de donner icy le catalogue des écrits de ce grand homme; laissant aux autres le soin de luy faire un éloge plus ample & plus pompeux.

Il excelloit dans toutes les parties de la Mathematique; mais principalement dans la science des nombres & dans la belle Geometrie. On a de luy une methode pour la quadrature des paraboles de tous les degrez.

Une autre *de maximis & minimis*, qui sert non seulement à la determination des problemes plans & solides; mais encore à l'invention des touchantes & des lignes courbes, des centres de gravité des solides, & aux questions numeriques.

Une introduction aux lieux, plans & solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problemes plans & solides; qui avoit esté veu devant que M. Descartes eut rien publié sur ce sujet.

Un traité *de contactibus sphæricis*, où il a demonstré dans les solides ce que M. Viet Maître des Requestes, n'avoit demonstré que dans les plans,

Un autre traité dans lequel il rétablit & demonstre les deux livres d'Apollonius Pergæus, des lieux plans.

Et une methode generale pour la dimension des lignes courbes, &c.

De plus, comme il avoit une connoissance tres-parfaite de l'antiquité, & qu'il estoit consulté de toutes parts sur les difficultez qui se presentoient; il a éclaircy une infinité de lieux obscurs qui se rencontrent dans les anciens. On a imprimé depuis peu quelques-unes de ses observations sur Athenée; & celuy qui a traduit le Benedetto Castelli de la mesure des eaux courantes, en a inseré dans son ouvrage une tres-belle sur une Epistre de Synesius, qui estoit si difficile, que le Pere Petau qui a commenté cét autheur, a advoüé qu'il ne l'avoit peu entendre. Il a encore fait beaucoup d'observations sur le Theon de Smyrne & sur d'autres Autheurs anciens. Mais la plupart ne se trouveront qu'éparses dans ses Epîtres; parce qu'il n'écrivoit gueres sur ces sortes de sujets, que pour satisfaire à la curiosité de ses amis.

Tous ces ouvrages de Mathematique, & toutes ces recherches curieuses de l'antiquité, n'empéchoient pas que M. de Fermat ne fit sa charge avec beaucoup d'assiduité, & avec tant de suffisance, qu'il a passé pour un des plus grands Jurisconsultes de son temps.

Mais ce qui est de plus surprenant, c'est qu'avec toute la force d'esprit qui estoit ne-

cessaire pour soûtenir les rares qualitez dont nous venons de parler, il avoit encore une si grande delicatesse d'esprit, qu'il faisoit des vers Latins, François & Espagnols avec la méme elegance, que s'il eût vêcu du temps d'Auguste, & qu'il eût passé la plus grande partie de sa vie à la Cour de France & à celle de Madrid.

On parlera plus particulierement des ouvrages de ce grand homme, lors qu'on aura recouvert ce qui en a esté publié, & qu'on aura obtenu de M. son fils la liberté de publier ce qui ne l'a pas encore esté.

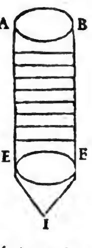
OBSERVATION DE MONSIEUR de Fermat sur Synesius, rapportée à la fin de la traduction du livre de la mesure des eaux courantes, de Benedetto Castelli.

LES pages qui restent vuides dans ce cayer m'ont donné la pensée de les remplir de la belle observation que j'ay apprise ces jours passez, de l'incomparable Monsieur de Fermat, qui me fait l'honneur de m'aimer, & de me souffrir souvent dans sa conversation. C'est sur la quinziéme Lettre de Synesius Evéque de Cyrene, qui traite d'une matiere qui n'a esté entenduë par aucun des interpretes, non pas mémes par le sçavant Pere Petau, ainsi qu'il l'advouë luy-méme dans les Notes qu'il a faites sur cét Autheur; Et je donne d'autant plus volontiers cette observation, qu'elle a beaucoup de rapport avec les traitez qui sont cy-devant.

Cét Evéque écrit à la sçavante Hypatia, qui estoit la merveille de son siecle, & laquelle enseignoit publiquement la Philosophie, avec l'admiration de tous les sçavans, dans la celebre Ville d'Alexandrie. J'ay traduit cette Lettre du Grec en cette maniere. Je me trouve si mal, que j'ay besoin d'un hydroscope. Je vous prie d'en faire faire un de cuivre, & de me l'acheter. C'est un tuyau en forme de Cylindre, qui a la figure & la grandeur d'une fleute; sur sa longueur il porte une ligne droite, qui est coupée en travers par de petites lignes, par lesquelles nous jugeons du poids des eaux. L'un des bouts est couvert d'un cone, qui est posé également dessus, en telle sorte que le tuyau & le cone ont une méme base. L'on appelle cét instrument Baryllion. Si on le met dans l'eau par la pointe il y demeurera debout, & l'on peut aisement compter les sections qui coupent la ligne droite, & par là l'on connoit le poids de l'eau.

Comme nous avons perdu la figure & l'usage de cét instrument, de méme qu'une infinité d'autres belles choses, que les Anciens avoient inventées, & dont ils se servoient, les sçavans de ce temps icy se sont donnez beaucoup de peine pour comprendre quel estoit cét instrument dont parle Synesius. Il y en a qui ont crû que c'estoit une Clepsydre, mais le Pere Petau a rejetté avec raison cette opinion. Pour luy, il advouë, qu'il ne le comprend pas, il soupçonne pourtant que c'estoit un instrument qui servoit à niveler les eaux, & qui avoit du rapport avec celuy dont Vitruve fait mention au livre 8. ch. 6. de son Architecture, qu'il appelle Chorobates, mais il est aisé de juger par la lecture de Vitruve, & de Synesius, que ce sont deux instrumens fort differens, & en figure, & en usage, & que si tous deux ont des sections, comme remarque le Pere Petau, celles du Chorobates sont perpendiculaires sur l'horizon, & celles de l'hydroscope luy sont paralleles. Je passe sous silence plusieurs autres differences, que je pourrois remarquer, pour rapporter le sentiment de Monsieur de Fermat, qui est sans doute le veritable sens de Synesius. Cét instrument servoit pour examiner le poids des differentes eaux pour l'usage des malades; car les Medecins sont d'accord que les plus legeres sont les meilleures; le terme *ῥοπὴ*, dont se sert Synesius le monstre clairement. Il ne signifie pas icy *libramentum* le nivelement, comme a crû le Pere Petau, mais en matiere de Ma-

chines, il signifie le poids, que les Latins appellent ***momentum***, & de là le traité des equiponderans d'Archimede a pour titre Ἰσοῤῥοπικῶν. Mais dautant que la balance, ny aucun autre instrument artificiel, ne pouvoit pas donner exactement la difference du poids des eaux, à cause qu'elle est petite entre elles, les Mathematiciens inventerent sur les principes du traité d'Archimede ***de his quæ vehuntur in aqua***, celuy dont parle Synesius, qui monstre par la nature des eaux mêmes, la difference du poids qu'elles ont entr'elles, la figure en est telle; A F est un Cylindre de cuivre, A B est le bout d'en haut, qui est toûjours ouvert, E F est le bout d'embas, qui est couvert du cone E I F, qui a la même base que le bout d'embas, A E, B F, sont deux lignes droites coupées par diverses petites lignes, tant plus il y en aura, tant plus exact sera l'instrument. Si on le met par la pointe du cone dans l'eau, & qu'on l'ajuste en telle sorte qu'il se tienne debout, il n'y enfoncera pas entierement; car le vuide qu'il a au dedans l'en empéchera; mais il y enfoncera jusques à une certaine mesure, qui sera marquée par les petites lignes; & il y enfoncera diversement, suivant que l'eau sera plus ou moins pesante; car plus l'eau sera legere, plus il y enfoncera: & moins, plus elle sera pesante, comme il nous seroit aisé de le demonstrer, s'il en estoit question icy. Voila la figure & l'usage de cét instrument, & la raison de cét usage. La lettre de Synesius s'y rapporte si exactement dans toutes ses circonstances, que feu Monsieur de Monchal, Archevéque de Tolose, ayant envoyé cette explication au Pere Petau, il advoüa que Monsieur de Fermat estoit le seul qui avoit compris quel estoit l'instrument, & il avoit écrit que dans une seconde impression il la mettroit dans ses notes. Mais parce que cela n'a pas esté fait, j'ay crû que le Lecteur sçavant & curieux ne sera pas marry que je luy en aye fait part.



LETTRE DE MONSIEUR DESCARTES A MONSIEUR DE FERMAT,

pag. 347. tom. 3. des Lettres de Monsieur Descartes.

MONSIEUR,

Je n'ay pas eu moins de joye de recevoir la Lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre vostre amitié, que si elle me venoit de la part d'une Maistresse, dont j'aurois passionnement desiré les bonnes graces. Et vos autres écrits qui ont precedé me font souvenir de la Bradamante de nos Poëtes, laquelle ne vouloit recevoir personne pour serviteur, qui ne se fut auparavant éprouvé contr'elle au combat. Ce n'est pas toutefois que je pretende me comparer à ce Roger, qui estoit seul au monde capable de luy resister; mais tel que je suis, je vous asseure que j'honnore extremement vôtre merite. Et voyant la derniere façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ay autre chose à y répondre, sinon qu'elle est tres-bonne, & que si vous l'eussiez expliqué au commancement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit, &c.

P. Herigonius, tom. 6. Cursus Mathematici p. 68.

De Maximis & minimis.

NUnquam fallit hæc methodus, ut asserit ejus inventor, qui est doctissimus Fermat Consiliarius in Parlamento Tolosano excellens Geometra nec ulli secundus in arte Analytica: qui optimè etiam restituit omnia loca plana Apollonij Pergæi, quæ in hac urbe vidimus manuscripta in manibus plurimorum, quibus subnexa est ab eodem auctore ad locos planos & solidos Isagoge.

D. ISMAEL BULLIALDUS
Exercitatione de Porismatibus.

HAnc de porismatibus scriptiunculam datâ mihi occasione composui, cùm ante biennium vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat in suprema Curia Tolosana Senator integerrimus & in judicijs exercendis peritissimus, rerum Mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas & porismata quæ tam theorematicè quam problematicè proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi unius monumentis & collectionibus Mathematicis porismatum naturam & usum discere possumus, cùm ex Veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus superfit. Illius tamen sententia legenti statim obuia non est; textusque corruptione, & applicationis porismatum defectu obscurior proculdubio evadit. Interea dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici juris facere placuit; ut alios ad eorundem investigationem impelleremus; ipsumque Amplissimum Dominum de Fermat, ad sua edenda, utinam & ad alia sublimis intellectus sui γεννήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est, quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem à subtilissimis ætatis nostræ Geometris Bonaventura Cavallerio Bononiæ, & Evangelista Toricello Florentiæ summis laudibus in cœlum ferri, ejusque inventa mirabilia prædicari auribus meis audivi, quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multâque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatissimum toto pectore veneror ac colo.

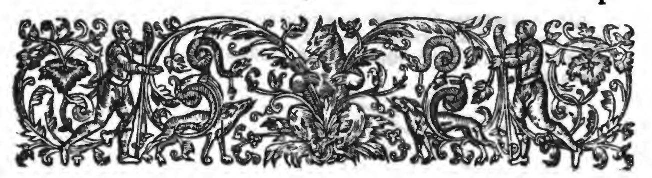
R. P. Marinus Mersennus Ordinis Minimorum, Reflexionum Physicomathematicarum pag. 215.

CUm autem vivos potiùs quam mortuos quærerem, unus abfuit Clarissimus Fermatius, Geometraurm Coryphæus; quem tamen Burdigalam redux, ductore integerrimo, doctissimoque Senatore, Domino d'Espagnet, velut avulsum Bergeraco, triduò amplexus sum.

Samuel Sorberius in præfatione operum Gassendi.

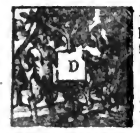
PETRUM Fermatium tam longo intervallo Vietam, Diophantum & Pythagoreos omnes post se relinquentem.

VARIA



VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE.



E locis quàm plurima ſcripſiſſe veteres, haud dubium. teſtis Pappus initio libri 7. qui Appollonium de locis planis, Ariſtæum de ſolidis ſcripſiſſe aſſeverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis ſatis ipſis fuit locorum inveſtigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non ſatis generaliter expreſſerunt, ut infra patebit.

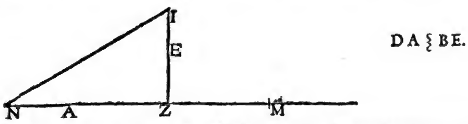
Scientiam igitur hanc propriæ & peculiari analyſi ſubjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis deſcribit lineam rectam, aut curvam. linea recta unica & ſimplex eſt, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipſis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis deſcribit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus: at quando deſcribit parabolem, hyperbolem, vel ellipſim, fit locus ſolidus: ſi alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & ſolidorum inveſtigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem poſſunt inſtitui æquationes, ſi duas quantitates ignotas ad datum angulum conſtituamus, quem ut plurimum rectum ſumemus, & alterius ex illis poſitione datæ terminus unus ſit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut ſolidus, ut ex dicendis clarum fiet.

Recta data positione sit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. sit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam.



D A ∝ B E.

Erit enim ut B ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A ad E. data est, & datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, & angulus I N Z. Datur autem punctum N. & recta N Z. positione. Ergo dabitur N I. positione, & est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partim sunt data, partim ignotis A & E admixta, vel in datas ductis, vel simpliciter sumptis.

Zp — D A ∝ B in E.

fiat D in R. æquale Zp

Erit ut B. ad D. ita R – A ad E.

Fiat M N. æqualis R. dabitur punctum M. ideoque M Z. æquabitur R – A. dabitur ergo ratio M Z. ad Z I. sed angulus ad Z. datur: ergo triangulum I Z M. specie, & concludetur rectam M I. junctam dari positione: ideoque punctum I. erit ad rectam positione datam: idemque nullo negotio concludetur in qualibet æqualitate cujus homogenea quædam afficientur ab A. vel E.

Et est simplex hæc & prima locorum æqualitas, cujus beneficio invenientur loci omnes ad lineam rectam; verbi gratia 7. prop. lib. 1. Appollonii de locis planis, quæ generaliùs jam poterit enuntiari & construi.

Huic æqualitati subest pulcherrima propositio sequens, quam illius ope deteximus.

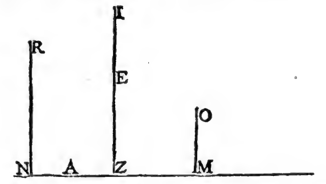
Si sint quotcumque lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod sub ductis & datis efficietur dato spatio æquale, punctum rectam lineam positione datam continget.

Infinitas omittimus, quæ Appollonianis meritò possent opponi.

Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando,

A in E. æq. Z. pl. A E ∝ Zp

quo casu punctum I. est ad hyperbolem.



Fiat N R. parallela Z I. sumatur in N Z. quodvis punctum, ut M. à quo ducatur M O. parallela Z I. & fiat rectang. N M O. æquale Z pl. per punctum O. circa asymptotos N R. N M. describatur hyperbole, dabitur positione, & transibit per punctum I. cùm ponatur rectang. A. in E. sive N Z I. æquale N M O. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data vel ab A. vel E aut A in E. affecta.

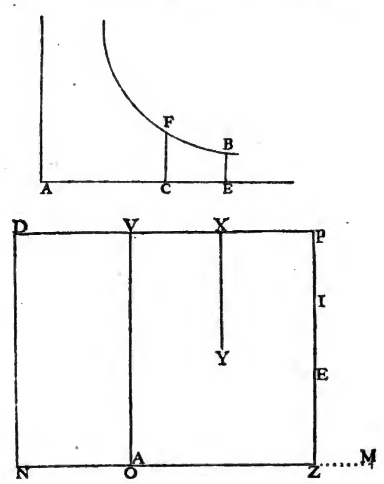
Ponatur D^p + A in E. (æq.) R in A + S in E. Igitur ex artis præceptis, D^p + AE ∞ RA +
R in A + S in E – A in E. æquabitur D^p

Effingatur rectang. abs duob. laterib. in quo homogenea R in A + S in E – A S E. in E. reperiantur. Uno verbo A S. æquetur O. & R – E. æquetur I. igitur O I ∞ D^p quod proponitur, & hæc erit constructio, D^p æquetur A E B. rectang. igitur A C F. erit O in I. erunt duo latera A – S & R – E. & rectang. sub ipsis æquabitur.

R in A + S in E – A in E – R in S.

Si igitur à D^p abstuleris R in S. rectangulum sub A – S, in R – E. æquabitur D^p – R in S.

Fiat N O. æqualis S. & N D. parallela Z I. fiat æqualis R. per punctum D. ducatur D P. parall. N M. O V. parall. N D. & Z I. producatur in P Cùm N O. æquetur S, & N Z, A: ergo A – S. æquabitur O Z, sive V P, similiter cùm N D. sive Z P. æquetur R, & Z I, E, ergo R – E, æquabitur P I, Rectangulum igitur sub V P, in P I. æquatur dato D^p – R in S: ergo punctum I, erit ad hyperbolem, cujus asymptoti



PV, VO. Rectangulo enim D^p – R in S, æquetur sumpto quovis puncto X, & ductâ parall. X Y, Rectang V X Y, & per punctum Y, circa asymptotos P V, V O, hyperbole describatur, per punctum I, transibit, nec est difficilis in quibuslibet casibus analysis aut constructio.

Sequens æqualitatum localium gradus est cùm A^2 vel æq. E^2 vel est in ratione data ad E^2 vel etiam A^2 + A in E, est ad E^2 in data ratione, denique hic casus omnes æquationes comprehendit intra metam quadratorum, quarum homogenea omnia vel à quadrato A, vel à quad. E, vel à rectang. A in E. afficiuntur.

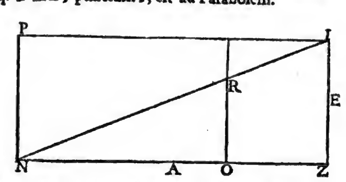
A^2 ∞ E^2A^2 ad E^2 in ratione data A^2 + AE, ad E^2 in ratione.

His omnibus casibus punctum I, est ad lineam rectam, cujus rei demonstratio facillima.

Sit N Z, quad. + N Z, in Z I, ad Z I, quad. in ratione data, ducatur quævis parallela O R, quadratum N O + N O in O R erit ad O R quadratum, in eadem ratione, ut est facillimum demonstrare. Punctum igitur I, erit ad rectam positione. Sumatur enim quodvis punctum, ut O, & fiat data ratio quadrati N O + N O, in O R, ad O R, quadratum. Juncta N R. dabitur positione, & satisfaciet proposito; idemque continget in quibuslibet æquationibus, quarum omnia homogenea à potestatibus ignotarum, vel rectangulo sub ipsis afficientur, ut inutile sit singulos casus scrupulosiùs perquirere.

Si potestatibus ignotarum, vel rectangulis sub ipsis, admisceantur homogenea, partim omnino data, partim sub data recta in alteram ignotarum, difficilior evadit constructio, singulos casus construimus breviter & demonstramus.

$A^2 \infty DE$. Si A^2 æq. D in E, punctum I, est ad Parabolem.



constituantur N Z, & Z I, ad quemcumque angulum Z.

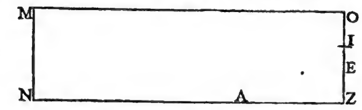
Fiat N P, Parallela Z I, & circa diametrum N P describatur parabole, cujus rectum latus recta D, datæ, & applicatæ sint parallellæ N Z. punctum I. erit ad parabolem hanc positione datam. Ex constructione rectangulum sub D, in N P, æquabitur quadrato P I, hoc est, si P I, intelligatur esse A, & N P, intelligatur esse E, D, in E, æquabitur A^2.

Ad hanc æquationem facillimè reducentur omnes in quibus A^2, miscetur homogeneis sub datis in E, aut E^2, homogeneis sub datis in A, idemque continget, licèt homogenea omnino data æquationibus misceantur.

Sit E^2, æquale D in A.

$E^2 \infty DA$. In præcedenti figura vertice N, circa diametrum N Z, describatur parabole, cujus rectum latus sit D, & applicatæ rectæ N P, parallela, præstabit propositum, ut patet,

$B^2 - A^2 \infty DE$ $B^2 - DE \infty A^2$. Ponatur $B^2 - A^2$ æqu. D in E. Ergo $B^2 -$ D in E æquabitur A^2.



Applicetur B^2 ad D, & fit æquale D. in R.

Ergo D in R − D in E, æquabitur A^2 Ideoque D in R − E æquabitur A^2.

Ideoque hæc æquatio reducetur ad præcedentem. Recta quippe R − E, succedet ipsi E.

Fiat quippe N M, parallela Z I, & æqualis R, & per punctum M ducatur M O, parallela N Z, datur punctum M, & recta M O, positione, in hac constructione O I, æquatur R − E. ergo D. in O I, æquabitur N E quad. sive M O quad. vertice M. circa diametrum M N, descripta parabole, cujus dextrum latus D, & applicatæ ipsi

NZ, parallelæ, præstabit propositum, ut patet ex constructione.

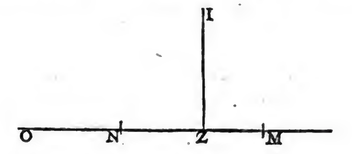
Si $B^2 + A^2$ æqu. D in E.

D in $E - B^2$ æquabitur A^2 &c. vt supr. similiter omnes æquationes affectæ construentur.

Sed A^2 miscetur sæpe E^2 & homogeneis omnino datis.

$B^2 - A^2$ æquetur E^2. $B^2 - A^2 \infty E^2$.

Punctum I est ad circulum positione datum, quando angulus NZI. est rectus.



Fiat N M, æqualis B, circulus centro N. intervallo N M, descriptus præstabit propositum, hoc est quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia ut I, quadratum Z I, æquabitur quadr. N M, sive B^2 quad. NZ, sive A^2 ut patet.

Ad hanc æquationem reducentur omnes affectæ ab A^2 & E^2, & ab A, vel E, in datas ductis, modo angulus N Z I, sit rectus, & prætera coefficientes A^2 æquentur coefficientibus E^2.

Sit $B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$, æquale $E^2 + {}^2R$ in E. Addatur utrimque R^2, ut E, + R, succedat E, fiet $R^2 + B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$ æqu, $E^2 + R^2 + {}^2R$, in E. ipsis R^2 & B^2, addatur D^2, ut D + A succedat ipsi A, & summa quadratorum R^2, B^2: & D^2 æquetur P^2. $B^2 - {}^2DA - A^2 \infty E^2 + {}^2RE$.

Ergo auferendo scilicet D^2, quod utrimque fuerat additum, $P^2 - D^2 - {}^2D$ in $A - A^2$.

Æquabitur $R^2 + B^2 - {}^2D$ in $A - A^2$.

Nam ex constructione $P^2 - D^2$ æquatur $R^2 + B^2$, si igitur loco ipsius A + D, sumpseris A, & loco E $\mp$ R sumpseris E.

Fiet $P^2 - A^2$: æq. E^2.

Et reducetur æquatio ad præcedentem.

Simili ratiocinatione similes æquationes reducentur & hac viâ omnes propositiones secundi libri Appollonii de locis planis construximus, & sex priores in quibuslibet punctis habere locum demonstravimus; quod sanè mirabile est, & ab Appollonio fortasse ignorabatur.

Sed $B^2 - A^2$ ad E^2, habeat rationem datam.

Punctum I. erit ad Ellipsim. $B^2 - A^2$. ad E^2 rati.

Fiat MN. æqualis B, & per verticem M. diametrum N M, centrum Z. describatur Ellipsis cujus applicatæ sint rectæ Z I, parallelæ, & quadrata.

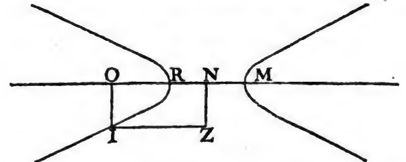
Applicatarum ad rectangulum subsegmentis diametri habeant rationem datam, punctum I, erit ad hujusmodi Ellipsim. Etenim quadratum N M – quad NZ, æquatur rectangulo sub diametri segmentis.

Ad hanc reducentur similes in quibus A^2 ex una parte opponetur E^2 sub contraria affectionis nota, & sub coefficientibus diversis. Nam si coefficientes sint eædem, & angulus sit rectus, locus erit ad circulum, ut jam diximus. Licèt igitur coefficientes sint eædem, modò angulus non sit rectus, locus erit ad Ellipsim.

Et licet commisceantur æquationibus homogenea sub datis & A vel E, fiet reductio eo quod jam usurpavimus artificio.

$A^2 + B^2$ ad E^2 ratio hyperbol.

Si $A^2 + B^2$, est ad E^2 in data ratione punctum I, est ad hyperbolem.



OI, sit A. ON, seu ZI. sit E.

Fiat NO, parallela ZI, data ratio sit eadem quæ B^2. ad quad. NR. Dabitur ergo punctum R, circa diametrum RO. per verticem R, centrum N describatur hyperbolæ cujus applicatæ sint parallelæ NZ, & rectangulum sub tota diametro & RO, ad quadratum OI. sit in data ratione NR, quadrati ad B^2. Ergo componondo rectangulum sub MOR, posita MN, æquali NR, erit ad quadratum OI, una cum B^2 in ratione data, NR, quadrati ad B^2, sed rectang. MOR, unà cum NR quad æquatur NO quadrat. sive ZI, quad. sive E^2, & quadrat. OI, una cum B^2 æquatur quadrato NZ, sive A^2 una cum B^2. Ergo est ut E^2 ad $B^2 + A^2$ ita NR, quad. ad B^2 & convertendo B^2. $+ A^2$ est ad E^2, in ratione data. Punctum igitur Z, est ad hyperbolem positione datam.

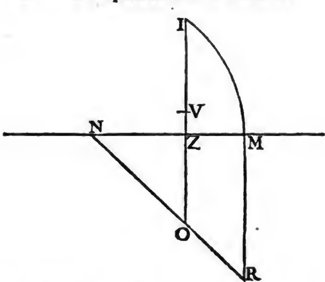
Eodem quo jam usi sumus artificio ad hanc æquationem, reducentur omnes quæ ab A^2 & E^2 afficiuntur unà cum datis, sive simpliciter, sive misceantur ipsis homogenea sub A vel E, in datas, modò A^2 habeat eamdem ex altera parte affectionis notam, quàm E^2 Nam si sint diversæ, propositio concludetur per circulos vel Ellipses.

Difficillima omnium æqualitatum est quando ita miscentur A^2 & E^2 ut nihilominus homogenea quædam ab A in E afficiantur una cum datis, &c.

$B^2 - {}^2A^2$ ∞ ${}^2A\ E + {}^2$.

$B^2 - {}^2A^2$ æquatur ${}^2A$ in $E + E^2$ addatur utrimque A^2, ut $A + E$. sit latus alterius ex homogeneis, ergo.

$$B^2 - A^2 \text{. æquabitur } A^2 + {}^2A \text{ in } E.$$



Pro $A + E$, sumatur E, si placet, & ex præcedentibus circulus MI, præstet propositum, hoc est MN, quad. (sivè B^2) – NZ, quad. (sive A^2) æquetur quadrato ZI, sive quad. abs $A + E$, fiat VI, æqualis NZ, sive A, ergo ZV, æquatur E. in

hac autem quæſtione punctum V, ſive extremum rectæ E, tantùm inquirimus. Videndum ergo & demonſtrandum ad quam lineam ſit punctum V. Fiat M R, parallella Z I, & æqualis M N, & jungatur N R, ad quam producta I Z, incidat ad punctum O. Cùm M N. æquetur M R, ergo N Z æquabitur Z O. Sed N Z, æquatur V I. Ergo toti V O, toti Z I, eſt æqualis: ideoque quad. M N — quad. N Z æquatur quadrato V O. Datur autem triangulum N M R. ſpecie. Ergo quadrati N M, ad quadratum N R, datur ratio; ideoque & quadrati N Z ad quadratum N O, dabitur ratio. Ratio igitur quadrati M N — quadrato N Z, ad quadratum N R — quadrato R O datur. Probavimus autem quadratum O V, æquari quadrato M N — quad. N Z. Ergo ratio quadrati N R — N O. quad. ad quad. O V, datur. Dantur autem puncta N & R, & angulus N O Z. Ergo punctum V, ex ſuperioribus demonſtratis eſt ad Ellipſim.

Non abſimili methodo ad ſuperiores caſus reducentur reliqui, in quibus homogenea ſub A in E, homogeneis partim datis, partim ſub A^2 aut E^2 immiſcebuntur; aut etiam ſub A & E, in datas ductis, cujus rei diſquiſitio facillima. Semper enim beneficio trianguli ſpecie noti conſtruetur quæſtio.

Breviter igitur & dilucidè complexi ſumus quidquid de locis planis & ſolidis inexplicatum veteres reliquere.

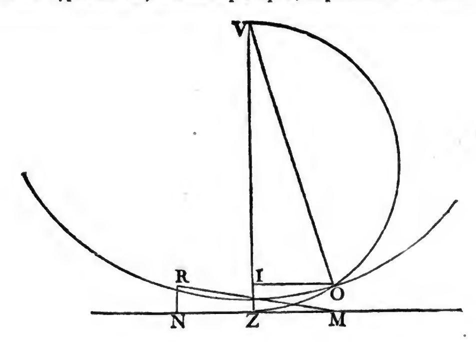
Conſtabitque deinceps ad quem locum pertinebunt caſus omnes propoſ. ultimæ lib. 1. Appoll. de locis planis, & omnia omnino ad hanc materiam ſpectantia nullo negotio detegentur.

Sed libet coronidis loco pulcherrimam hanc propoſitionem adjungere, cujus facilitas ſtatim innoteſcet.

Si poſitione datis quotcumque lineis, ab uno & eodem puncto ad ſingulas ducantur rectæ in datis angulis, & ſint ſpecies ab omnibus ductis dato ſpatio æquales, punctum contingit poſitione datum ſolidum locum. Unico exemplo ſit via ad praxim.

Datis duobus punctis N, M, inveniendus locus à quo ſi jungas rectas I N, I M, quadrata rectarum I N, I M, ad triangulum I N M, datam habeant rationem, recta N M, æquetur B, & recta Z I ad angulos rectos, dicatur E, terminus N Z, dicatur A, ergo ex artis præceptis $^2 A^2 + B^2 - {}^2B$, in $A + {}^2E^2$, ad rectangulum B in E habebit rationem datam.

Et reſolvendo hypoſtaſes ex jam traditis præceptis, ita procedet conſtructio.

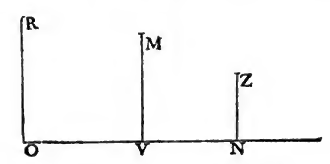


& ad parabolem positione datam. Ergo datur. Non dissimili methodo solventur quæstiones omnes quadrato quadraticæ: expurgabuntur enim methodo Vietæ cap. 1. de emend. ab affectione sub cubo, & quadrato quadrato ignoto ab una parte, reliquis homogeneis ab altera constitutis per parabolem, circulum, vel hyperbolem solvetur quæstio.

Proponatur ad exemplum inventio duarum mediarum in continua proportione.

Sint duæ rectæ, B major, D minor, inter quas duæ mediæ proport. sunt inveniendæ, fiet A^3 æqualis B^2 in D.

Si major mediarum ponatur A. Æquentur singula homogenea B in A in E. Illinc fiet A^2 æquale B in D E, istinc A in E æquale B in D. Ideoque quæstio per hyperboles & paraboles sectionem perficietur.



Exponatur enim recta quævis positione data, O V N, in qua detur punctum O, sint rectæ datæ B & D, inter quas duæ mediæ proportionales inveniendæ. Ponatur recta O V æquari A, & recta V M ipsi O V ad rectos angulos æquari E, ex priori æqualitate quâ A^2 æq. B in E, constat per punctum O, tanquam verticem describendam parabolem, cujus rectum latus sit B, diameter ipsi V M, parallela & A O, applicatæ ipsi O V, transibit igitur hæc parabole per punctum M ex 2. æqualitate, qua B in D æquatur A in E, sumatur punctum ubilibet in rectâ O V, ut N, à quo excitetur perpendicularis N Z, & fiat rectang. O V Z, æquale rectangulo B in D, excitetur etiam perpendicularis O R, circa asymptotos R O, O V describenda hyperbole per punctum Z, ex nostra methodo locali dabitur positione, & transibit per punctum M, sed parabole etiam quam supra descripsimus dabitur positione & per idem punctum M, transit, datur igitur punctum M, positione, à quo si demittatur perpendicularis M V, dabitur punctum V, & recta O V, major duarum continuè proportion. quas quærimus.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ per interfectionem paraboles & hyperboles.

Si ad quadrat. quad. lubeat quæstionem extendere omnia ducantur in A, A^4 æquab. B^2. in D in A. æquentur singula homogenea juxta superiorem methodum B^2 in E^2.

Fient duæ æqualitates, nempe A^2 & B^2 in E, & D in A & E^2.

Quæ singulæ dabunt parabolem positione datam, fiet igitur constructio mesolabii per interfectionem duarum parabolarum hoc casu.

Prior constructio & posterior sunt apud Eutocium in Archimedem, & huic methodo facillimè redduntur obnoxiæ.

Abeant igitur illæ parapleroses Vietææ, quibus æquationes quadrato quadraticas reducit ad quadraticas per medium cubicarum abs radice planâ, pari enim elegantiâ, facilitate, & brevitate solvuntur, ut jam patuit, perinde quadrato quadraticæ ac cubicæ quæstiones, nec possunt, opinor elegantiùs.

Ut pateat elegantia hujus methodi, En constructionem omnium problematum cubicorum, & quadrato quadraticorum per parabolem & circulum.

Ponatur $A^4 + Z^3$ in A æquari D pp.

Ergo A^4 æquabitur Z^s in $A + D^{pp}$, fingatur quadratum abs $A^2 - B^2$ aut alio quovis quadrato, fiet quadratum $A^4 + B^4 + 2B^2$ in A^2. Addatur ad supplementum singulis æqualitatis partibus $B^4 - 2B^2$ in A^2 fiet $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in A^2 æquale $B^4 - B^2$ in $A^2 - Z^s$ in $A + D^{pp}$ sit $2B^2$ — æquale N^2.

Et singulis homogeneis sive partibus æqualitatis æquetur N^2 in E^2. Fiet illinc per subdivisionem quadraticam $A^2 - B^2$. æquale N in E, ideoque punctum extremum E, erit ad parabolem, ex nostra methodo, istinc fiet $\frac{B^4 - A^2}{N^2} - \frac{Z^s \text{ in } A}{N} + \frac{D^{pp}}{N^2}$ æquale E^2.

Ideoque ex nostra methodo punctum extremum E, erit ad circulum. Descriptione igitur paraboles & circuli solvitur quæstio.

Hæc methodus facillimè ad omnes casus tam cubicos quàm quadrato quad. extenditur. Curandum enim tantùm ut ex una parte sit A^4 ex altera quælibet homogenea, modò non afficiantur ab A^3. at per expurgationem Vietæam omnes æquationes quad. quadratæ ab affectione sub cubo liberantur, ergo eadem in omnibus methodus, cùm autem æquationes cubicæ liberentur ab affectione sub quadrato per methodum Vietæam, homogeneis omnibus in A, ductis, fiet æquatio quadrato quadrata cujus nullum ex homogeneis afficietur sub cubo, ideóque solvetur per superiorem methodum.

Id solùm in secunda æqualitate curandum est, ut A^2 ex una parte, ex altera E^2. sub contrariâ affectionis notâ reperiantur, quod est semper facillimum.

Sit enim in alio casu, ut omnia percurramus, A^4 æquale Z^{pl} in $A^2 - Z^s$ in D.

Fingatur quodvis quadratum abs A^2 — quovis quadrato dato, ut B^2, fiet $A^4 + B^4 - 2A^2$ in B^2. adjiciatur utrique æqualitatis parti ad supplementum $B^4, - 2B^2$ in B^2. fiet. $A^4 + B^4 - 2A^2$ in B^2 æquale $B^4 - 2B^2$ in $A^2 + Z^p$ in $A^2 - Z^s$ in D.

Ut igitur commoda fiat divisio, in 2. A æqualitate sumenda differentia inter $2B^2$, & Z^p quæ sit V G. N^2, & utraque æqualitatis pars æquanda N^2 in E^2.

Ut illinc fiat $A^2 - B^2$ æquale N in E. Istinc $\frac{B^4 - A^2}{N^2} - \frac{Z \text{ in } D}{N^2}$ æquale E^2.

Advertendum deinde $2B^2$ debere præstare Z^p alioquin A^2 non afficeretur signo defectus, & pro circulo inveniremus hyperbolem, cui promptum remedium. B^2 enim ad libitum sumimus, ideoque ipsius duplum majus Z^p nullius est negotii sumere. Constat autem ex methodo locali circulum creari semper ex æqualitate, in cujus parte altera quadratum unum ignotum afficitur signo + in alterâ, aliud quadratum ignotum signo —.

Si sumas ad hoc exemplum inventionem duarum mediarum, erit A^3 æqu. B^2 in D. Et A^4 æq B^2 in D in A.

Adjiciatur utrimque $B^4 - 2B^2$ in A^2. $A^4 + B^4 - 2B^2$ in A^2 æquabitur $B^4 + B^2$ in D in $A - 2A^2$ in B^2 sit $2B^2$, æquale N^2.

Et singulæ æqualitatis partes æquentur N^2 in E^2.

Fiet illinc $A^2 - B^2$ æquale N in E. Ideoque extremum E, erit ad parabolem.

Fiet istinc $B^2 \frac{1}{2} + D \frac{1}{2}$ in $A - A^2$ æquale E^2.

Ideoque extremum E erit ad circulum. Qui hæc adverterit, frustra quæstionem mesolabii, trisectionis angularis, & similes tentabit deducere ex planis, hoc est per rectas & circulos expedire.



APOLLONII PERGÆI LIBRI DUO DE LOCIS PLANIS RESTITUTI.



OCI plani quid ſint notum eſt ſatis ſuperque : hac de re ſcripſiſſe libros duos Appollonium teſtatur Pappus, eorumque propoſitiones ſingulas initio libri ſeptimi tradit, verbis tamen aut obſcuris, aut ſanè interpreti minùs perſpectis. (Græcum enim codicem videre non licuit) hanc ſcientiam totius, ut videtur, Geometriæ pulcherrimam ab oblivione vindicamus, & Appollonium de locis planis differentem, Appolloniis Gallis, Batavis, & Illyricis audacter opponimus ; certam gerentes fiduciam, non aubi præclariùs, quàm hoc in opere Geometriæ miracula elucere : quod ut ſtatim fatearis, hîc exordior.

Propoſitiones libri primi hæ ſunt.

PROPOSITIO I.

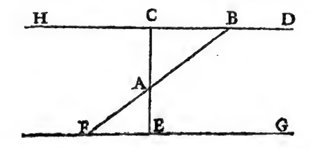
SI duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter ſe datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes ſpatium : contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum ; & alterius terminus locum planum poſitione datum continget, interdùm quidem ejuſdem generis, interdùm verò diverſum, & interdùm ſimiliter poſitum ad rectam lineam, interdùm contrario modo

Hæc propoſitio in propoſitiones octo dividi commodè poteſt, & quævis ex iis in multiplices caſus: obſcuritatem interpreti præbuiſſe videtur interpunctionum defectus; imo & Pappus ipſe hoc loco propter nimiam brevitatem videtur non vacaviſſe obſcuritate. Singula dum ſecamus in octantes, ita revelamus.

PROPOSITIO I.

SI à dato puncto in rectam lineam duæ lineæ agantur datam habentes proportionem; & terminus unius contingat locum positione datum, hoc est, aut rectam, aut circumferentiam circuli positione datam; alterius terminus continget rectam, aut circuli circumferentiam positione datam.

Esto datum punctum. A. per quod agantur in directum rectæ. A B, A F, in proportione datâ, & sit verbi gratia punctum B, in rectâ linea H C B D, positione



datâ; aio punctum F, esse quoque ad rectam positione datam. à puncto A, demissâ in rectam H D, perpendiculari A C, dabitur punctum C, producatur C A, ad E, & fiat ratio C A, ad A E, æqualis datæ, dabitur igitur recta A E, & punctum E. per punctum E, parallela rectæ H D, ducatur G E F, dabitur positione, & in ea erit punctum F, quia omnes rectæ per datum punctum parallelas secantes in eamdem rationem dividuntur; patet ergò quamcunque rectam per punctum A, transeuntem, & datis positione parallelis terminatam in datam secari proportionem.

Esto deinde datum punctum B, & circulus positione I C N, cujus centrum A, jungatur B A, in puncto I, circumferentiam secans, & producatur



I B, ad B E, ut sit ratio I B, ad B E, æqualis datæ, continuetur in F, & fiat A I, ad E F, ut I B, ad B E, & centro F intervallo F E, describatur circumferentia circuli E D Z, quam patet ex constructione positione dari, aio rectas omnes per punctum datum B transeuntes, & utrimque circumferentiis datorum positione circulorum terminatas in datam secari rationem.

Ducta enim verbi gratia C B D iungantur C A, D F, est ut I B, ad B E, ita A I, ad E F, ergò ut tota B A, ad B F, ita A I, sive A C, ad E F, sive F D, & sunt æquales anguli A B C, F B D, ad verticem; patet itaque triangula esse similia atque ideò, ut C B, ad B D, ita B A, ad B F, hoc est in ratione data, cum igitur à dato puncto B ducantur in directum duæ rectæ B C, B D, verbi gratia in data ratione quarum B C, tangit circumferentiam positione datam tanget quoque B D, aliam circumferentiam positione datam.

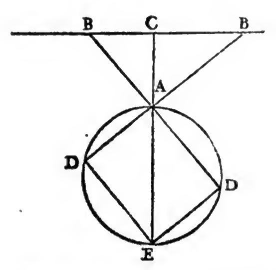
Si producantur rectæ donec ad concavas circulorum circumferentias pertingant, idem eveniet.

Monemus porrò nos minima quæque in demonstrationibus non docere, cum statim pateant, imò & casus diversos non persequi cum ex adductis minimo possint negotio derivari.

II. PROPOSITIO.

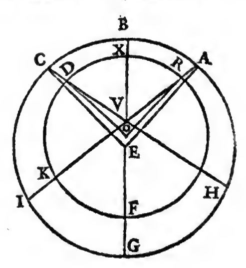
SI à dato puncto ducantur in directum duæ rectæ, datum continentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione, tanget pariter & terminus alterius.

Esto datum punctum A, data primum recta B C, positione in quam demittatur perpendicularis, A C, dabitur ergo & punctum C, producatur & fiat spatio dato æquale rectangulum C A E, super diametro A E, descripto circulo A D E, aio rectas omnes per punctum A ductas, & illinc rectâ, hinc circumferentiâ circuli (quem patet dari positione) terminatas ita ad punctum A, secari ut rectang.



sub partibus æquetur spatio dato, nam sit verbi gratia recta D A B, juncta D E, cum sit angulus A D E, in semicirculo rectus, & Anguli B A C, D A E, ad verticem æquales, erunt triangula D A E, A C B, similia, atque ideò rectangulum B A D, rectangulo C A E, dato æquale; cum igitur per punctum A, ducantur duæ rectæ A B, A D, in directum & terminus unius nempe A B, tangat rectam B C, positione datam, tanget & terminus alterius locum planum, hoc est circulum A D E, positione datum.

Sed detur punctum V, & circulus B I G H, positione cujus centrum E jungatur E V, & producatur in B, dabitur V B, producatur in F, ut sit rectangulum B V F,

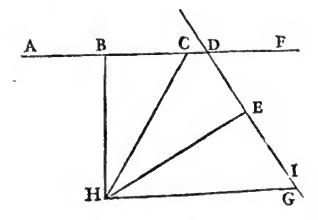


æquale dato cui etiam æquetur rectangulum G V X, super diametro X, F, circulus describatur X K F, quem quidem dari positione patet, Aio rectas per punctum V, transeuntes & duobus circulis, terminatas ita secari in V, ut rectangulum sub segmentis dato æquale efficiant. Ducatur enim verbi gratia A V, K I, Aio rectangulum A V K, æquari dato, sumatur centrum circuli minoris O, recta autem A V K I, secet eundem circulum in R, jungantur rectæ R O, A E, posuimus rectangulum G V X, æquari B V F, erit ergò G V, ad V B, ut F V, ad V X, & componendo, & sumendo antecedentium dimidia, & per conversionem rationis, ut E B, sive E A, ad E V, ita O X, sive O R, ad O V, & habent duo triangula O V R, V E A, commvnem angulum E V A, erunt ergò similia & ut A V, ad R V, ita A E, ad R O, sive E B, ad O X, V E, ad V O, cum ergò ut E B, ad O X, ita V E, ad V O, ergò ut E B, ad O X, ita reliqua V B, ad reliquam V X, atque ideò ut A V, ad R V, ita B V, ad X V, similiter probabimus ut G V, ad V F, ita I V, ad K V, erit igitur vicissim ut G V, ad V I, ita F V, ad V K, ut autem F V, ad V K, ita V I, ad V X, (quia rectangula K V R, F V X, in circulo sunt æqualia) & ut V R, ad V X, ita probavimus esse V A, ad V B, erit igitur ut F V, ad V K, ex una parte, ita V A, ad V B, rectangulum igitur K V A, rectangulo F V B, dato æquale, ex alia verò parte erit ut G V, ad I V, ita V R, ad V X, atque ideo rectangulum I V R, rectangulo G V X, dato æquale; cum igitur per punctum V, ducantur duæ lineæ in directum A V, & V K, comprehendentes spatium datum, & terminus unius nempe V A, contingat circulum positione datum, tanget & terminus alterius locum planum hoc est circulum X K F, positione datum.

III. PROPOSITIO

SI à dato ducantur duæ lineæ datum continentes angulum, & datam proportionem habentes, contingat autem terminus unius locum planum positione, continget & terminus alterius.

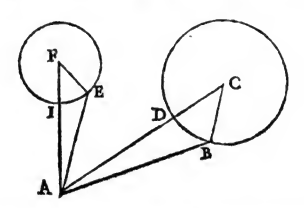
Esto primò datum punctum H, & recta linea A F, positione, in quam demissa perpendicularis H B, dabitur. Fiat angulo dato æqualis angulus B H E, & sit B H, ad



H E, in ratione data dabitur recta H E, positione & punctum E. à puncto E, ad rectam H E, excitata perpendicularis infinita D E G, dabitur positione, sumatur quodlibet punctum in recta A F, ut C, & juncta H C, fiat angulo dato æqualis C H I, aio rectam H C, ad H I, esse in ratione data, nam cum sint æquales anguli B H E, C H I, dempto communi C H E, erunt æqua les B H C, E H I, & sunt anguli ad B, & E, recti, sunt igitur similia triangula H B C, H E I, & ut H B, ad H C, ita H E, ad H I, & vicissim ut H B, ad H E, ita H C, ad H I,

habet rationem datam. Cum igitur à dato puncto H, ductæ fuerint duæ lineæ H C, H I, in dato angulo C H I, & in data ratione, & altera nempe H C, ad punctum C, contingat rectam positione continget & terminus alterius locum planum, nempe rectam D G, quam dari positione probatum est.

Sed tangatur circulus, esto punctum A, datus circulus positione I E, cujus centrum F, jungatur F A, secans circulum in I, & fiat angulus æqualis dato, & ratio I A,

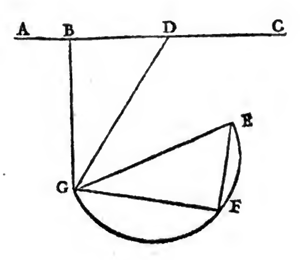


A D, data, dabitur A D, positione & punctum D, producatur, & fiat ut I A, ad A D: ita I F: ad D C, centro C, descripto circulo D B, quem patet dari positione sumatur quodvis punctum in priore circulo ut, E, & iuncta E A, fiat angulo dato æqualis E A B, & sit punctum B in secundo circulo, aio esse A E ad B A in ratione datâ jungantur F E, B C, probabimus ut supra æquales angulos F A E, C A B, & similitudinem triangulorum F A E, C A B, iisdem rationibus quibus jam in priore propositione, ejusque 2. figura usi sumus, arguemus, eritque A F, ad E A, ut A C, ad A B, & vicissim ut A F, ad A C, hoc est ut A I, ad A D, ita A E, ad A B, dabitur ergo ratio A E ad A B, & patet tum sensus, tam consequentia propositionis.

IV. PROPOSITIO.

SI à dato puncto ducantur duæ lineæ datum continentes angulum & datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget, & terminus alterius.

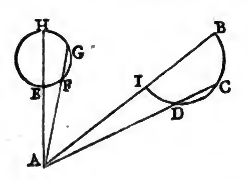
Sit datum punctum G, recta positione data A C, in quam ducatur perpendicularis G B, esto angulus datus B G E, & spatium datum sub B G, in G E, super G E,



describatur

deſcribatur ſemicirculus G E F, & ſumpto in recta poſitione data quovis puncto ut D, junctaque D, G, fiat angulo dato æqualis D G F, aio rectangulum ſub D G, in G F, æquari dato, jungatur F E, probabimus ut in propoſitione præcedente æqualitatem angulorum B G D, E G F, ſed recti ad B, & F, ſunt æquales, non latebit igitur triangulorum B G D, E G F, ſimilitudo neque rectangulorum B G, in G D, & G D, in G F, æqualitas, neque veritas poſitionis, ſi igitur, &c.

Sed ſit datum punctum A, & circulus poſitione H G E, ducatur per ipſius centrum A E H.



Secans circumferentiam in punctis E H, ſit angulus datus H A B, & ſpatium datum rectangulum ſub H A, in A I, vel E A, ſub A B, ſuper recta I B deſcripto ſemicirculo (quem quidem patet dari poſitione) ſatisfiet quæſtioni, nam ducta G F A verbi gratia & facto angulo G A D C, dato æquali ; aio rectangulum G A D, vel FAC, æquari dato, nam cum rectangula H A I, E A B, æquentur, erit ut H A, ad A E, ita A B, ad A I, Ex propoſitionis verò ſuperioris ratiocinio patet æqualitas angulorum H A G, B A C, & ex prima propoſitione facilè deducetur eſſe ut H A, ad G A, ita B A, ad A C, ſed ut H A, ad G A, ita F A, ad A E, ergò ut F A, ad A E, ita B A, ad A C, rectangulumque F A C, rectangulo B A E, dato eſt æquale. Deinde eſt ut B A, ad A C, ita A D, ad A I, rectangulumque G A D, , rectangulo H A I, dato æquale. conſtat itaque ex omni parte propoſitum, ſi igitur, &c.

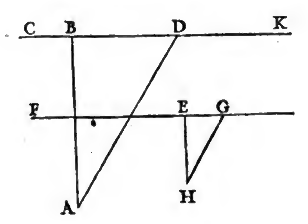
Hoc in caſu ſumpſimus punctum A extra circulum poſitione datum, in 2. verò caſu 2. propoſitionis intra circulum perſeveramus.

Quatuor propoſitiones præcedentes punctum unum datum aſſumunt, ſequentes duo.

PROPOSITIO V.

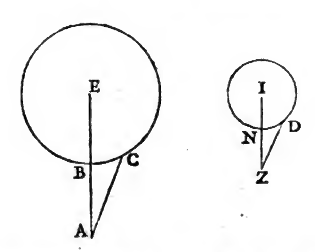
SI à duobus punctis datis duæ lineæ parallelæ agantur rationem habentes datam, contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, continget & terminus alterius.

Sunto duo puncta A & H recta poſitione C B D K, in quam demittatur perpendicularis A B, cui parallela ducatur H E, & ſit ratio A B, ad H E, data, dabitur



punctum E, per quod ductâ E F G, perpendiculari ad H E, & rectæ positione datæ parallela; aio omnes parallelas à punctis A H, ductas, & rectis C D, F G, positione datis terminatas, esse in proportione data A B, ad H E; erunt enim anguli B A D, EHG, æquales, & recti ad B, & E, similes ergo trianguli B A D, E H G, & reliqua facilia. Cum igitur à datis duobus punctis A, & H, ductæ fuerint parallelæ A D, H G, in ratione data, quarum A D, est ad datam rectam positione erit & H G, ad rectam positione datam, ideoque ad locum planum.

In hac figura sint data puncta A, & Z, & circulus positione B C, cujus centrum E, jungatur A E, occurrente circulo in B, & huic parallela ducatur Z N, fiatque ratio

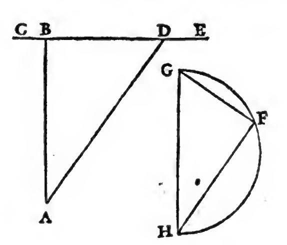


A B, ad Z N, æqualis datæ producatur Z N, in I, & fiat ratio B E, ad N I, æqualis etiam datæ, centro I, intervallo I N, descriptus circulus dabitur positione, & quæstioni satisfaciet, nam ductis parallelis A C, Z D, circulis ad puncta C, D, occurrentibus erit ratio A C, ad Z D, æqualis datæ, esse enim angulos B A C, N Z D, æquales, jam primùs hujus propositionis casus evicit, reliquum præstabit secundum propositionis epitagma.

PROPOSITIO VI.

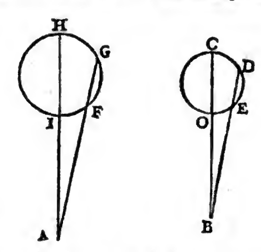
SI à duobus punctis datis duæ parallelæ agantur datum comprehendentes spatium contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A, & H, recta positione C E, in quam perpendicularis A B



cui parallela ducatur H G, & rectangulo dato sit æquale rectangulum sub A B,HG,dabitur recta H G, super qua descriptus semicirculus H F G,quæstionem perficiet, ductis enim ubicumque parallelis A D, H F, & juncta G F,patebit demonstrationes superiores retractanti triangulorum B A D, G H F, similitudo, ideoque rectangulum sub A D, in H F, æquale dato sub B A, in H G, concludetur ; cum igitur à duobus punctis, &c.

In 2. casu sint data puncta A & B, & circulus positione I F G H, per cujus centrum transeat A I H, cui parallela ducatur B C, & sit rectangulum sub A I, B C, æquale

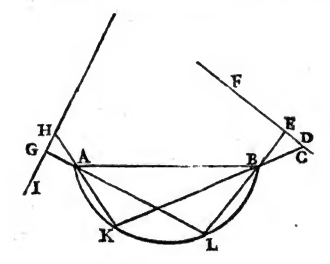


dato, eidemque æquale rectangulum sub A H, in B O, super recta O C, descriptus semicirculus præstat propositum, nam ductis parallelis A F G, B E D, erunt anguli H A G, C B D, æquales & rectangulum sub A G, in B E, æquale dato eidemque rectangulum sub A F, in B D, nec, absimilis est ei, quæ in 2. epitagmate propositionis quartæ prodita est demonstratio.

VII. PROPOSITIO.

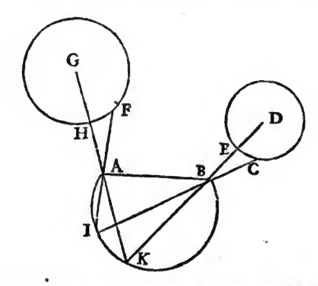
SI duæ lineæ agantur à datis duobus punctis datum continentes Angulum & datam habentes proportionem contingat autem terminus unius locum planum positione datum continget, & terminus alterius.

Sunto duo puncta A, & B, recta positione I G H, super B A, describatur portio circuli A L B, capiens angulum æqualem dato à puncto A, ducatur in rectam I H, perpendicularis A G, quâ productâ donec circumferentiæ occurrat in L, producatur L B E, & fiat A G, ad B E, in ratione data perpendicularis ad B E, agatur F E, D C, & sumatur quodlibet punctum in portionis circumferentia ut K, à quo ducantur per puncta A & B, rectæ K A H, K B D, occurrentes rectis I H, F C, in punctis H & D,



aio A H, ad B D, esse in ratione data A G, ad B E, cum enim hoc ita se habeat erunt triangula A G H, B E D, similia, ideoque anguli G A H, E B D, eisque ad verticem K A L, K B L, æquales, quod quidem ita se habet cum eidem circuli portioni insistant, & proclivis est ab analysi ad synthesim regressus. Cum igitur à datis duobus punctis A, & B, ductæ fuerint duæ rectæ A H, B D, datum continentes angulum H K D, & terminus ipsius A H, contingat rectam I H, positione datam, continget & terminus B D, rectam F C, quam dari positione evicit constructio.

Sed sint data puncta A B, circulus positione H F, super recta A B, describatur portio.

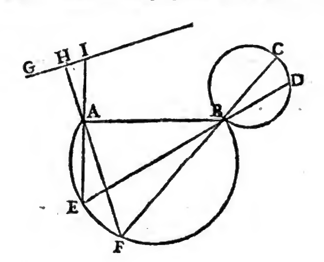


circuli A K B, capiens angulum dato æqualem, centrum circuli H F, esto G, jungatur A H G, producatur donec portioni occurrat in K, & ducatur K, B, E, & sit ratio A H, ad B E, data procucatur B E, in D, donec H G ad D E, sit pariter in ratione data, centro D, descriptus circulus dabitur positione, & dabit solutionem quæstionis: ductis quippe I A F, I B C, erunt anguli ad A, & B, æquales, & reliquum propositi non est laboriosum; statimque patet A F, ad B C, esse in ratione datâ, imò & ad circumferentias concavas productas idem præstare: cum igitur, &c.

VIII. PROPOSITIO.

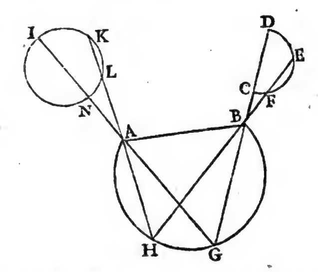
SI à duobus punctis datis ducantur duæ lineæ, datum continentes angulum, & datum comprehendentes spatium, contingat autem terminus unius locum planum positione datum, continget & terminus alterius.

Sint data duo puncta A, & B, recta positione G I, super A B, describatur portio circuli capiens angulum datum, ductæ perpendicularis A H, in G I, continuetur in F,



& juncta F B, producatur in C, sitque spatium datum A H, in B C, super recta B C, descriptus circulus faciet quod proponitur, erit quippe sumpto quovis puncto in portione, E, & junctis E A I, E B D, rectangulum sub A I, B D, æquale dato nec differt ab expositis aliis casibus demonstratis.

Sed sint data duo puncta A & B, datus positione circulus I K L, & super A B, descripta portio circuli capiens angulum dato æqualem: ducatur per centrum recta A N I, & producatur in G, junctaque G B, producatur & fiat rectangulum sub A I, in B C, æquale dato eidemque æquale rectangulum sub A N, in B D, super C D, descriptus semicirculus satisfaciet proposito.



Hoc est sumpto quolibet puncto in H, & reliquis ut supra constructis, ut in figura, erit rectangulum sub A K, in B F, æquale dato, eidemque rectangulum sub A L, in B E, nec est diversa demonstratio à precedentibus constat itaque propositum.

Eaque ratione prior Appollonii seu Pappi propositio redditur manifesta.

Observandum autem casus quos in semicirculis tantùm expressimus in circulis integris locum habere; sed & casus multiplices ex variâ datorum positione oriri, quos otiosiores ex præcedentibus facili operâ & proclivi ratiocinio deducent.

Subjicit Pappus locum planum quem 2^{s}. ex rectis contingit interdum esse ejusdem generis; interdum verò diversum. Hoc patet quia in 1. propositione verbi gratiâ est ejusdem generis, nam si prior sit ad rectam est quoque ad rectam posterior, si ad circulum similiter ad circulum, in secundæ verò priore parte, & aliis quibusdam casibus est diversi generis.

Addit deinde aliquando similiter poni ad rectam lineam, interdum contrario modo: quo loco verba (ad rectam lineam) quæ nullum sensum admittunt, censeo delenda, & ita locum interpretor, ut aliquando secundus locus priori contrario modo ponatur, verbi gratiâ, si prior sit ad convexum circuli, secundus ad concavum, &c. cujus rei exempla priores propositiones suppeditabunt.

PROPOSITIO II.

SI rectæ lineæ positione datæ unus terminus datus sit, & alter circumferentiam concavam positione datam continget.

Hæc verba si ita legantur falsa est propositio, reponendum igitur loco, verbi gratiâ (positione datæ) magnitudine datæ; eritque sensus: ut datâ circuli diametro & centro, extremitas diametri sit ad circulum positione datum cujus rei veritas cum per se pateat cur diutius hîc immoremur.

C 3

PROPOSITIO. III.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ datum angulum continentes, commune ipsorum punctum continget circumferentiam concavam positione datam.

Hæc propositio per se patet, dari enim super rectâ lineâ duo puncta jungente portionem circuli capientem angulum datum docuit Euclides in elementis.

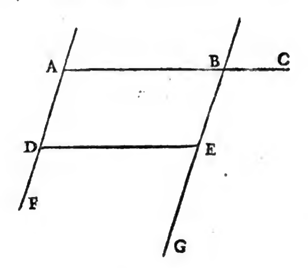
PROPOSITIO IV.

SI trianguli spatii magnitudine dati, positione & magnitudine basis data sit, vertex ipsius rectam lineam positione datam continget, parallelam nempe basi datæ, cujus inventione ex 1. elem. facilè deduces omnia.

PROPOSITIO V.

SI rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam positioni datæ æquidistantis unus terminus contingat rectam lineam positione datam, & alius terminus rectam lineam positione datam continget.

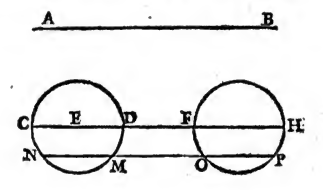
Datæ rectæ lineæ D E, magnitudine, & rectæ A C, positione datæ æquidistantis



unus terminus ut D, contingat rectam A F, positione datam si per punctum E, duxeris B E G, ipsi A F, parallelam constabit propositum. Erunt quippe rectæ omnes inter has duas parallelas interceptæ & rectæ A C, positione datæ æquidistantes, inter se æquales: quod ipsa constructio manifestat. Si igitur alter terminus cujuslibet sit ad rectam A F, erit alius ad B G, ut vult propositio, quam etiam licet porrigere levi negotio ad circulos.

Sit enim data A B, positione cui æquidister recta N O, magnitudine data, cujus punctum N, sit ad circumferentiam circuli C N M, positione dati; Aio punctum O, esse ad circulum positione datum. Esto E, centrum circuli C N M, & ducta diameter ipsi N O, parallela continuetur in F, donec recta C F, æquetur N O, datæ, dabitur recta C F, positione, & magnitudine, producatur, & fiat F H, æqualis C D, su-

per F H, descriptus circulus præstabit propositum, erit quippe punctum O, ad ipsius circumferentiam cum enim punctum O, sit ad circumferentiam circuli F O P, erunt



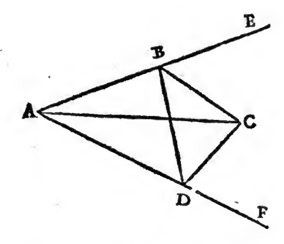
rectæ C N, F O, æquales & parallelæ, cum æquales & parallelas C F, N O, conjungant; erunt igitur anguli N C D, O F H, æquales; quod quidem ita se habet cum rectæ C D, F H, sint æquales, & à rectis N M, O P, æqualiter distent. poterit igitur propositio Pappi universaliùs ita concipi.

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam positione datæ æquidistantis, unus terminus contingat locum planum positione datum, & alius terminus locum planum positione datum continget.

PROPOSITIO VI.

SI à Puncto ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo vel datam habentes proportionem vel quarum una simul cum ea ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit continget punctum rectam lineam positione datam.

Hujus propositionis duæ sunt partes, quarum prior hæc est Sint duæ rectæ positione datæ A E, A F, in puncto A, concurrentes, & à puncto C, demittantur rectæ C B

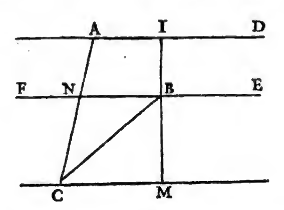


C D, in datis angulis C B A, C D A, & sint rectæ B C, C D, in data proportione Aio punctum C, esse ad rectam lineam positione datam. Jungantur A C, B D, in quadrangulo A B C D, dantur tres anguli A B C, A D C, B A D, datur igitur angulus B C D, datur etiam ratio B C, ad C D, ex hypothesi ergo datur specie triangulum B D C, & anguli C B D, C D B, reliqui igitur A B D, A D B, dantur, ideoque spe

cie triangulum A B D, datur, igitur ratio A B, ad B D, ſed ex demonſtratis datur ratio B D, ad B C, (cum probatum ſit triangulum B D C, ſpecie dari) ergo datur ratio A B, ad B C, datur autem B A, poſitione & punctum A, datur igitur poſitione recta A C, & in ea ſumpto quovis puncto & ab eo dimiſſis in datis angulis rectis in rectas datas, probabitur ſemper demiſſas eſſe in data proportione.

Alter caſus eſt ſi rectæ datæ ſint parallelæ.

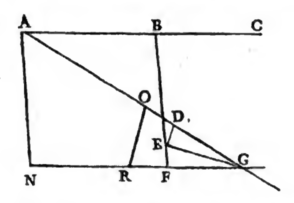
Sint rectæ C A, C B, in datis angulis C A D, C B F, in proportione datâ, angulus C N B, datur, eſt enim æqualis propter parallelas dato C A D, datur igitur ſpecie



triangulum C N B, & ratio C N, ad C B, datur autem ex hypotheſi ratio C B, ad C A, ergo ratio C N, ad C A, data eſt; ideoque probatur facile punctum C, eſſe in recta datâ poſitione. Conſtructio, per punctum quodvis ut B, trajiciatur perpendicularis I B M, dabitur I B, fiat ut A N, ad N C, ita I B, ad B M, per punctum M, ducta duabus datis parallela, ſatisfaciet quæſtioni, nec eſt operoſa demonſtratio; ſi igitur à puncto quodam ad poſitione datas duas rectas lineas parallelas vel inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ, datis angulis habentes datam proportionem continget punctum rectam lineam poſitione datam.

Secunda pars ita ſe habet.

Dentur rectæ A C, A G, in puncto A concurrentes, ponatur A N, ſuper rectam A C, in dato angulo C A N, fiat A N, æqualis datæ & ipſi A C, parallela ducatur N G,



angulus alius datus ſit R O G, per primam partem hujus ducatur recta G E, in qua ſumpto quovis puncto ut E, rectæ E D, E F, ipſis R O, A N, parallelæ, ſint in ratione datâ, dabitur G E, poſitione ex ſuperius demonſtratis. Producatur F E, in B, dabitur F B, magnitudine eſt enim æqualis datæ A N, propter parallelas. Quodcumque igitur punctum ſumpſeris in recta G E, ut E, à quo in rectas A C, A G, demiſeris rectas E D, E B, in angulis datis recta B E, unà cum E F, ad quam E D, habet rationem

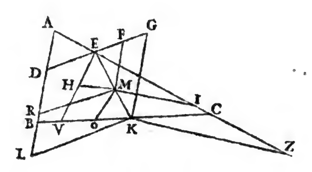
tionem datam data erit, quod vult propositio. Si igitur à puncto quodam ad positione duas rectas lineas inter se convenientes ducantur rectæ lineæ in datis angulis quarum una simul cum ea ad quam altera habet proportionem datam, data fuerit continget punctum rectam lineam positione datam.

PROPOSITIO VII.

SI sint quotcumque rectæ lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod datâ lineâ & ductâ continetur, una cum contento datâ lineâ, & alterâ ductâ æquale ei, quod datâ, & aliâ ductâ & reliquâ continetur punctum rectam lineam positione datam, continget.

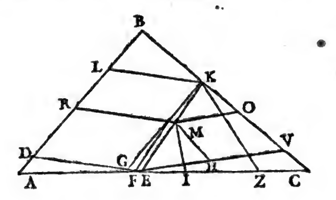
Hæc propositio est ampliatio præcedentis, & quod de duabus lineis est superiùs demonstratum in prima parte propositionis sextæ, hîc in quotcumque locum habere proponitur.

Exponantur tres rectæ positione datæ & triangulum constituentes A B, BC, CA, est invenienda recta E K, verbi gratia in qua sumendo quodlibet punctum vt M, & ab eo



ducendo rectas M R, M O, M I, in angulis datis. M R A, M O B, M I A, summa duarum O M, & M I, sit ad M R, in ratione data, per primam partem propositionis præcedentis inveniatur recta in qua sumendo quodlibet punctum & ab eo ducendo rectas ad rectas A B, B C, ductæ sint in ratione datâ, dabitur positione recta quæsita, punctum igitur in quo concurret cum A C, dabitur, esto E, à quo ducantur E V, E D, ipsis M O, M R, parallelæ, ergo ex constructione V E, ad E D, habebit rationem datam, eâdem methodo sumptis A C, A B, rectis inveniatur punctum K, à quo ductæ K L, K Z, in datis angulis ipsis nempe M R, M I, parallelæ, sint in ratione data Erit igitur similiter K Z, ad K L, in ratione datâ, iungatur E K, quodcumque punctum in ea sumpseris præstabit propositum. Sumatur M, verbi gratia ex jam constructis fiat M F, parallela B A, & M H, parallela B C, probandum est summam duarum O M, MI, esse ad M R ut V E, ad E D, in ratione nempe data, fiat adhuc K G, parallela B A, ponatur verum esse quod intendimus probare, ergo vicissim erit ut M R, ad E D, ita summa duarum M I, M O, ad E V, & dividendo erit ut differentia M R, & D E, ad D E, ita differentia qua duæ O M, M I, superant E V, ad E V, cum autem M F, sit parallela B A, E F, erit differentia rectarum M R, & D E, & cum M H, sit parallela B C, E H, erit differentia rectarum, M O, V E, ideoque differentia rectarum I M, & E H, æquabitur excessui quo duæ M O, M I, superant rectam V E. Ex demonstratis igitur erit E F, ad D E, ut differentia rectarum I M, E H, ad E V, & vicissim E F, erit ad differentiam rectarum I M, E H, ut E D, ad E V, erit igitur convertendo differentia rectarum I M, E H, ad E F, in ratione data E V, ad E D, ex constructione autem (expositis tribus E H, E F, M I, est V E, ad E H, ut K E, ad E M, est etiam K Z, ad M I, in eadem ratione K E, ad E M, est etiam (cum K G, sit parallela B A,) G E, ad E F in eadem ratione K E, ad E M, igitur tres rectæ

V E, K Z, E G, ſunt in ratione trium H E, M I, E F, eſt igitùr ut differentia duarum E V, K Z, ad E G, ità differentia duarum M I, E H, ad E F, ſed probavimus



differentiam duarum M I, E H, ad E F, habere rationem datam E V, ad E D, igitur differentia duarum E V, K Z, ad E G habebit rationem datam E V, ad E D, & viciſſim differentia duarum E V, K Z, ad E V erit ut E G, ad E D, & componendo K Z, erit ad E V, ut G D, ad E D, ſed propter perallelas K G, B A, K L, æquatur D G, igitur viciſſim erit ut K Z, ad K L, ita E V, ad E D, quod quidem ita ſe habere jam ex ipſa conſtructione innotuerat.

Conſtat itaquè veritas pulcherrimæ propoſitionis, nec eſt difficilis aut abſimilis ad ulteriores caſus, & quotlibet lineas porrigendas conſtructio, & demonſtratio, ſemper enim beneficio conſtructionis in duabus lineis expedietur problema in tribus lineis: beneficio conſtructionis in tribus lineis expedietur problema in quatuor lineis: beneficio conſtructionis in quatuor expedietur problema in quinque, & ſimili omninò ac uniformi in infinitum methodo.

PROPOSITIO VIII. & Ultima.

SI ab aliquo puncto ad poſitione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis quæ ad puncta in ipſis data abſcindant rectas lineas vel proportionem habentes vel ſpatium continentes datum, vel ita ut ſpecies ab ipſis ductis, vel exceſſus ſpecierum ſit æqualis ſpatio dato punctum continget poſitione datas rectas lineas.

Hujus propoſitionis (ſi vera eſſet) quatuor eſſent partes, ſed eam in ratione datâ, veram duntaxat deprehendimus; valeant igitur reliqua de ſpatio contento ſub duabus, & de ſumma, aut differentiâ quadratorum ab ipſis, & tanquam commentitia, aut huc aliundè tranſlata rejiciantur.

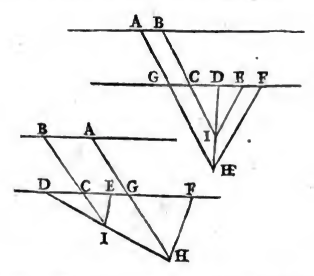
Proponatur itaque ſic emendatum Theorema.

Si ab aliquo puncto ad poſitione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipſis data abſcindant rectas lineas proportionem habentes datam, punctum continget poſitione datam rectam lineam.

Conſtructio ſic procedet.

Sint datæ parallelæ A B, G C, puncta in ipſis data A, & F, angulus unus ex datis B A H, alter G F H, cùm puncta A, & F, dentur, & anguli ad ipſa dabuntur, rectæ A H, F H, poſitione; ideóque punctum concurſus H, dabitur etiam punctum G, in quo A H, ſecat parallelam G C, recta G F, in puncto D, ita ſecetur ut G D, ad D F, ſit in ratione datâ, dabitur punctum D, jungatur D H, dabitur igitur poſitione D H. Aio rectam D H, præſtare propoſitum; Hoc eſt ſumpto in eâ quolibet puncto ut I,

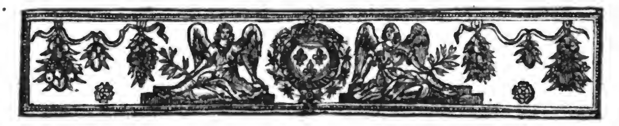
&ab eo ductis I B, I E, in angulis datis abscissam A B, ad datum punctum A, ad abscis-



sam E F, ad datum punctum F, esse in ratione data G D, ad D F, secet B I, parallelam G F, in C, erit ex constructione I B, parallela H A, cùm fuerit demissa in angulo dato; hoc est ipsi H A B, æquali; erit etiam IE, parallela H F, G C, igitur propter parallelas æquatur A B, probandum superest, ut G C, ad E F, ita G D, ad D F, & vicissim ut G C, ad G D, ita E F, ad D F, hoc autem perspicuum est, ut enim H I, ad H D, ita G C, ad G D, & ut eadem H I, ad H D, ita E F, ad F D, esse igitur G C, ad E F, in ratione datâ fit perspicuum.

Sunt plures casus tam istius quàm præcedentium propositionum, quos invenire & addere cùm sit facile, cur in his diutiùs immoremur?





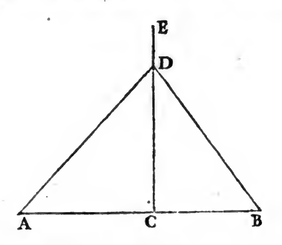
APOLLONII PERGÆI PROPOSITIONES DE LOCIS PLANIS RESTITUTÆ.

LIBER II.

PROPOSITIO I.

SI à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & sint quæ ab ipsis fiunt dato spatio differentia punctum positione datas rectas lineas continget.

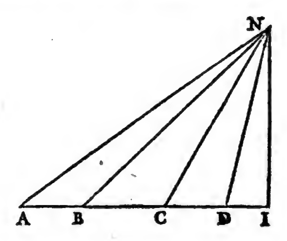
Sint data duo puncta A, & B; & sit datum quodlibet spatium quadrato A B, minus: dividatur A B, in C, ita ut quadratum A C, quadratum C B, superet dato spatio; & educatur perpendicularis infinita C E, in qua sumatur quodlibet punctum D, & jungantur D A, B D, Aio quadratum A D, superare quadratum D B, dato. Quod quidèm patet, cùm quadratum A D, eodem superet quadratum D B, quo quadratum A C, superat quadratum C B.



Si spatium datum sit majus quadrato A B, punctum C, extra lineam A B, cadet. Ad hanc propositionem pertinere possunt duæ sequentes.

Sint data quatuor puncta A B C D, in rectâ lineâ, & sit A B, æqualis C D, sumatur aliud quodcumque punctum ut N, & jungantur quatuor rectæ N A, N B, N C, N D, Aio duo quadrata A N, N D, superare duo quadrata B N, N C, rectangulo sub A B, in B D, bis.

Nam ducatur perpendicularis N I, & primum punctum I, extra rectam lineam A D, cadat: patet igitur excessum quadratorum A N, N D, super duo quadrata B N, N C, propter omnibus commune quadratum N I, esse id, quo duo quadrata A I-I D, superant duo quadrata B I, C I, sed quadrata duo A I, D I, per quartam secundi æquantur quadrato D I, bis, quadrato A D, & rectangulo A D I, bis; quadrata verò B I, C I, per eamdem propositionem æquantur quadrato D I, bis quadratis B D,

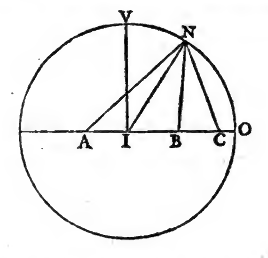


C D, & rectangulis sub B D, in D I, bis, & C D, in D I, bis, sive loco horum duorum rectangulorum uni rectangulo A D, in D I, bis, propterea quod A B, est æqualis C D, excessus igitur quadratorum A I, I D, super B I, C I, est idem qui A D, quadrat. super quadrata B D, C D, sive A B. Sed per quartam propositionem 2ª. quadratum A D, duo quadrata A B, B D, superat rectangulo sub A B, in B D, bis; constat ergo propositum.

Reliquos casus non adjungo neque in hac propositione neque in sequentibus, nam licèt sit facile, esset tædiosum.

Si à tribus punctis in rectâ lineâ constitutis inflectantur rectæ, & sint duo quadrata tertio majora, spatio dato, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint data tria puncta A B C, in rectâ lineâ, & datum quodlibet spatium rectangu-



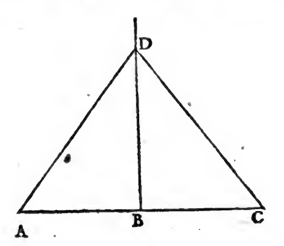
lo A B C, bis majus; fiat A I, æqualis B C, & spatium datum sit æquale rectangulo A B C, bis, & quadrato I V, centro I, intervallo I V, circulus V N O, describatur in cujus circumferentia punctum quodlibet sumatur ut N, junganturque N A, N B, N C, ad data puncta, aio duo quadrata A N, N C, quadratum N B, dato spatio superare; nam jungatur I N, ergò ex superiore propositione patet duo quadrata A N,

N C, æquari duobus quadratis I N, B N, & rectangulo A B C, bis, ergo duo quadrata A N, N C, superant quadratum N B, quadrato I N, & rectangulo A B C, bis, & constat propositum.

PROPOSITIO II.

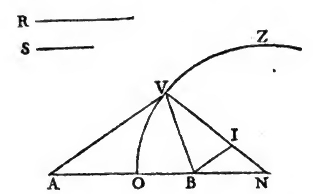
SI à duobus punctis inflectantur rectæ, & sint in proportione datâ, punctum continget vel rectam lineam, vel circumferentiam.

Sint data duo puncta A, & C, & sit primùm data ratio æqualitatis: dividatur A C



bifariam in B, & excitetur perpendicularis B D, patet quodcumque punctum in ipsa sumatur ut D, fore rectos A D, D C, æquales.

Sed sit data ratio inæqualitatis.

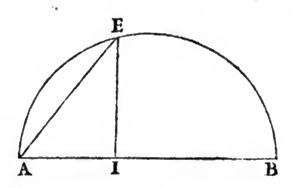


Et sint duo data puncta A, B, ratio ut R, ad S, fiat ut R, quadratum ad S, & ita A N, ad N B, inter A N, N B, sumatur media N O, cujus intervallo describatur circulus N O Z, & in ipsius circumferentia sumatur quodcumque punctum ut V, junganturque V A, V B, Aio esse in datâ ratione R, ad S, nam iuncta V N, ipsi V A, parallela sit B I, ut A N, ad N O, sive N V, ad N B, & sunt circà eumdem angulum A N V,, similia igitùr duo triangula A N V, B V N, & angulus V A B, angulo B V I, æqualis, Sed & A V B, V B I, propter parallelas æquales sunt, ergò similia triangula A V B, V B I, & est A V, ad V B, ut V B, ad B I, & ut V B, ad B I, id est A N, ad N B. id est R, quadratum ad S. quadratum, ita A N, quad. ad V B, Quad. est ergò A V, ad V B, ut R, ad S, & patet propositum.

PROPOSITIO III.

SI sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur, & ad positionem, & sit quod fit à ductâ æquale ei quod à datâ, & abscissâ, vel ad datum punctum, vel ad alterum datum in linea datâ positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam continget.

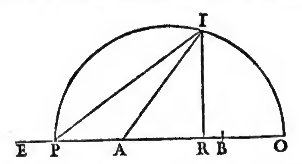
Sit data recta A B, positione & jn ipsa datum punctum A, oportet invenire circuli circumferentiam in quâ sumendo quodlibet punctum ut E, & demittendo perpendicularem E I, quadratum A E, sit æquale rectangulo sub datâ qualibet rectâ &



A I. (per quam debemus intelligere in hâc propositione abscissam ad datum punctum) sit recta data A B, super A B, describatur semicirculus; patet ex constructione A B, in A I, æquari quadrato A E.

Sed alius casus est difficilior quandò videlicèt recta abscinditur ad aliud punctum quàm A, ut in hoc exemplo.

Sint data duo puncta A B, & præterea punctum E, in eâdem recta lineâ; recta

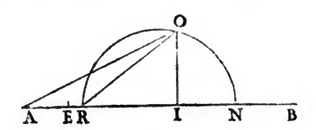


verò data sit A B, oportet invenire circuli circumferentiam ut P I O, in quâ sumendo quodlibet punctum ut I, & demittendo perpendicularem I R, quadratum A I, æquetur rectangulo sub rectâ A B, datâ & rectâ, E R, rectangulum B A E; ad rectam B A, applicetur excedens figura quadrata & faciat latitudinem rectam A P, cui fiat æqualis B O, super P O, descriptus semicirculus præstabit propositum, nam quadratum A I, æquatur quadrato A R, & quadrato R I, quadratum verò R I, æquatur rectangulo, P R O, & rectangulum P R O, rectangulis A R B, O A P, hoc est B P A, hoc est B A E, ut mox demonstrabitur, quadratum ergo A I, æquatur quadrato A R, rectangulo A R B, & rectangulo B A E, sive quadratum A I, æquatur rectangulo B A R, (nam huic rectangulo æquantur quadratum A R, & rectangulum A R B,) & rectangulo B A E, & adhuc hæc duo rectangula faciunt unum rectangulum sub B A, in E R, quod proindè quadrato A I, est æquale; probandum superest

rectangulum P R O, duobus rectangulis ARB, & P B O, æquale esse, nam ducendo inter se partes rectangulum PRO, est æquale singulis rectangulis PA, in RB, PA, in B O, hoc est B O, quadrato A R, in R B, A R, in B O, id est P A, in A R, sed duo P A, in A R, & P A, in R B, æquantur P A, in A B, sivè AB, in A O, una cum BO, quadrato æquatur A O B, hoc est P B O, ergò rectangulum A R B, una cum rectangulo P B O, facit rectangulum P R O, quòd erat demonstrandum.

Diversos casus non prosequor, sed ex jam dictis facillimum erit: videtur tamen alius hujus propositionis casus non omittendus quando videlicet punctum E, ultra A, ut superiùs non invenitur.

Sint data duo puncta A, & E, & recta data A B, & sit invenienda circuli circumferentia ut N O R, ita ut sumendo quodlibet in ipsa punctum ut O, & demittendo

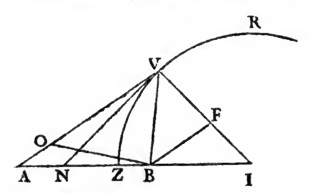


O I, perpendicularem, quadratum A O, sit æquale rectangulo sub B A, in E I, rerectangulum B A E, ad rectam B A, applicetur deficiens in figura quadrata in R, & ipsi A R, fiat æqualis B N super R N, descriptus semicirculus præstabit propositum. Demonstratio verò non est absimilis ei quam in priore casu attulimus.

PROPOSITIO IV.

SI à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & sit quod ab una efficitur eo quod ab altera dato majus quàm in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint duo puncta A, & B, ratio data A I, ad I B, spatium datum B A N, inter N I, & I B, media sit I Z, cujus intervallo describatur circulus Z V R, in quo sumatur



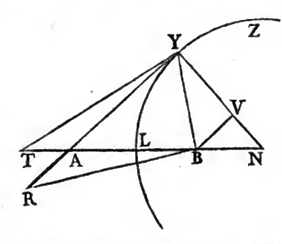
quodlibet punctum ut V, & jungantur V A, V B, Aio quadratum A V, quadrato V B, Majus esse quam in proportione data I A, ad B I, spatio dato B A N, nam fiat ipsi æquale rectangulum V A O, & jungantur O B, N V, V I, & ipsi A V, parallela B F, probandum est rectangulum A V O, ad quadratum V B, esse ut A I, ad I B, est ut N I, ad I Z, id est V I, ut V I, ad I B, & sunt circa eumdem angulum, ergò duo triangula N I V, V B I, sunt similia, & angulus N V B, angulo B V F, æqualis sed

sed angulus V N B, angulo V O B, est æqualis in eadem sectione, cum quatuor puncta N, B, V, O, sint in circulo propter æqualia rectangula B A N, V A O, ergò angulus V O B, angulo B V F, est æqualis, sed & angulus O V B, angulo V B F, propter parallelas, ergò duo triangula O B V, B V F, sint similia & ut O V, ad V B, ita V B, ad B F, addatur utrinque communis ratio A V, ad V B, ergò ratio composita ex A V, ad V B, & ex V B, ad B F, hoc est ratio A V, ad B F, id est A I, ad I B, erit eadem rationi A V, ad V B, & O V, ad V B, hoc est rectanguli A V O, ad quadratum V B, quod demonstrare oportebat.

Videtur Pappus omisisse hoc loco propositionem huic similem quæ ita se habet.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur & sit quod ab una efficitur eo quod ab altera, dato minùs quam in proportione, punctum positione datum circumferentiam continget.

Sint data duo puncta A, & B, ratio A N, ad N B, spatium B A T, inter T N, N B, esto media N L, cujus intervallo describatur circuli circumferentia L Y Z, in qua sumpto quolibet puncto Y, jungantur Y A, Y B, aio quadratum Y A, unà cum

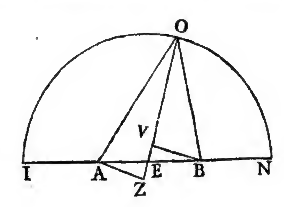


rectangulo B A T, dato, ad quadratum Y B, esse ut A N, ad N B, nam fiat Y A R, æquale B A T, & jungantur T Y, R B, Y N, & ipsi A Y, parallela B V, propter B A T, Y A R, æqualia rectangula probabitur angulus Y T B, angulo Y R B, æqualis & reliqua ut in superiore demonstratione.

PROPOSITIO V.

SI à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt, dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

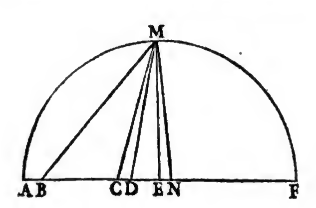
Sint data duo primùm puncta A B, quæ per rectam A B, conjungantur, bifariam scindatur in E, centro E, interuallo quocumque ut E I, circulus describatur ut I O N.



E

dico quodcumque punctum in ipsius circumferentia sumpseris ut O, evenire ut quadrata A O, O B, simul quadratorum I E, A E, sint dupla. Nam junctâ rectâ E O, in ipsam B V, A Z, perpendiculares demittantur, in triangulo A E O, quadratum A O, æquatur quadratis A E, E O, & rectangulo O E Z, bis, in triangulo O E B, quadrata O E, E B, æquantur quadrato O B, & rectangulo O E V, bis, sive O E Z, bis cum E V, sit æqualis E Z, propter æquales A E, E B, ergò jungendo æqualia æqualibus, quadrata A O, O B, & rectangulum O E Z, bis, æquantur quadratis A E, E B, sive quadrato E A, bis & quadrato E O, bis, id est quadrato I E, bis, unà cum rectangulo O E Z, bis, auferatur utrinque O E Z, bis, supererit verum quod asserebamus, & constat propositum in primo casu.

Sint data tria puncta B, D, E, in recta linea & sit recta B D, recta D E, major, differentiæ inter B D, & D E, sit tertia pars C D, centro E, intervallo quocumque vt E A, describatur semicirculus A M F, aio quodcumque punctum in ipsius circumferentia

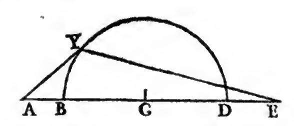


sumpseris ut M, eandem semper fore summam trium quadratorum M B, M D, M E, nam jungantur M B, M C, M D, M E, ipsi vero C D, fiat æqualis E N, & jungatur M N, cum B D, superet D E, triplâ C D, sive triplâ E N, ergo D N, unà cum duplâ C D, æquabitur B D, & C N, unà cum C D, æquabitur B D, auferatur utrinque C D, ergo C N, æquabitur B C, cum C D, sit æqualis E N, per secundam hujus libelli propositionem, idem erit semper excessus quadratorum C M, M N, super duo quadrata D M, M E, sed C M, quadratum est semper idem: ergò duo quadrata D M, M E, semper vel quadrato M N, æqualia erunt vel in idem excedent, vel in idem deficient. Addatur utrinque quadratum M B, ergò tria quadrata M B, M D, M E, duobus quadratis B M, M N, vel semper æqualia erunt, vel in idem excedent, vel in idem deficient, sed B M, M N, quadrata idem semper conflant spatium ex superiori propositione propter æqualitatem rectarum B C, C N, ergò quadrata B M, D M, E M, idem semper spatium conficiunt, quod erat demonstrandum.

DEMONSTRATIO GENERALIS
EJUSDEM PROPOSITIONIS.

EXponantur primò duo puncta A, & E, jungatur A E, & bifariam dividatur in C, planum datum sit Z, quod necessariò debet esse non minùs quadratis duobus A C, A E, ut patet, si sit æquale illis duobus quadratis, punctum C, tantùm proposito satisfaciet; nec erit aliud punctum à quo junctarum ad puncta A E, quadrata simul sumpta æquentur Z, plano.

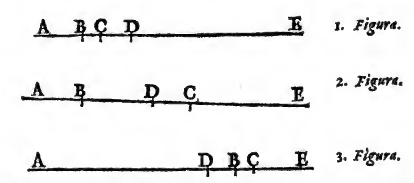
Si sit majus duobus quadratis A C, C E, excessus dimidium æquetur quadrato



C B, centro C, intervallo C B, descriptus circulus satisfaciet proposito, quod tanquam à Pappo demonstratum & ab aliis, & proclive nimis omittemus ne in facilibus diutiùs immoremur.

Lemma ad generalem methodum.

EXponantur in 1. 2. & 3. figura quotlibet puncta data A B C E, & pro numero punctorum sumatur rectarum puncto A, & reliquis datis terminatarum pars conditionaria A D, quadrans nempe in hoc exemplo; sit igitur A D, pars quarta rectarum A B, A C, A E, puncti D, diversa est positio prout variant casus. Aio rectas punctis datis & puncto D, à parte puncti A terminatas æquari rectis, punctis datis, & puncto D, à parte puncti E, terminatis, in 1. nempe figura rectam E D, æquari rectis A D, B D, C D, in 2. figura rectas E D, C D, æquari rectis B D, A D, & in 3. figura rectas E D, C D, B D, æquari A D, in 1. & in 3. figura ex hypothesi quater A D,



æquatur rectis A B, A C, A E, dematur utrinque A D, ter, remanebit illi A D, semel, sed auferre A D, ter, ab ipsis A B, A C, A E, idem est atque auferre A D, semel ab unaquaque ipsarum A B, A C, A E, quo peracto remanebunt istinc B D, C D, E D, æquales A D, quod erat demonstrandum.

Si darentur quinque puncta A D, quinquies esset conferenda cum quatuor rectis punctis datis & puncto A, terminatis: denique uniformi procederetur in infinitum methodo.

In 2. figura A D, quater, æquatur rectis A B, A C, A E, auferatur utrinque A D, ter, & addatur B D, remanebunt A D, B D, æquales E D, C D.

In 1. figura A D, quater æquatur rectis A B, A C, A E, addatur utrinque B D, C D, & dematur A D, ter, remanebunt rectæ A D, B D, C D, æquales rectæ D E.

Nec dissimilis est in quotlibet in infinitum punctis methodus, idemque concludetur quacunque ratione varient casus.

Lemma Alterum.

EXponatur in 1. figura constructio præcedens & sumatur in eadem recta punctum N, utcumque. Aio quadrata rectarum punctis datis & puncto N, terminatarum superare quadrata rectarum punctis datis, & puncto D, terminatarum quadrato D N, toties sumpto quot sunt puncta data, quater nempe in hoc exemplo.

Secunda & tertia figura varios casus repræsentant.

1. *Figura.* A B C D N E

2. *Figura.* A B D N C E

3. *Figura.* A N D B C E

In 1. figura quadrata A N, B N, E N, superant quadrata A D, B D, C D, si unumquodque unicuique conferas. quadrato D N, ter & rectangulis A D, in DN, bis, B D, in D N bis CD, in D N, bis, quadrata igitur A N, B N, C N, æquantur quadratis, A B, B D, C D, quadrato D N, ter, & rectangulis A D, in D N, bis, D B, in D N, bis, & C D, in D N, bis: illud autem patet ex genesi quadrati à binomia radice affirmatâ effecti. Ex alia autem parte quadratum E N, æquatur quadratis E D, N D, minùs E D, in D N, bis, illudque patet ex genesi quadrati à binomia radice negata effecti. Ergò quadrata quatuor A N, B N, C N, E N, æquantur quadratis quatuor A D, B D, C D, E D, quadrato D N, quater, rectangulis A D, in D N, bis, B D, in D N, bis, C D, in D N, bis, minus E D, in D N, bis, si igitur probaverimus rectangula negata æquivalere affirmatis manebit veritas propositionis stabilita, nempe quadrata A N, B N, C N, E N, superare quadrata A D, B D, C D, E D, quadrato D N, quater.

Probandum igitur rectangulum E D, in D N, bis, æquari rectangulis A D, in D N. bis, B D, in D N, bis, C D, in D N, bis; & omnibus ad D N, applicatis rectam E D, æquari rectis A D, B D, C D, quod quidem ita se habere superius lemma demonstravit.

Varios casus non moramur, si sint quinque puncta quadrata punctis datis, & puncto N, terminata, superabunt quadrata punctis datis & puncto D, terminata, quintuplo quadrati D N, nec differt à tradito casu ulterior demonstratio.

Inde patet summam quadratorum puncto D, terminatorum esse minimam.

Dum tibi loquimur, scrupulosam nimis casuum observationem non adjungimus. Conclusio secundi Lemmatis semper eò deducetur ut probentur rectangula omnia ex una parte affirmata æquari negatis ex alterâ, ideoque res ad primum Lemma deducetur.

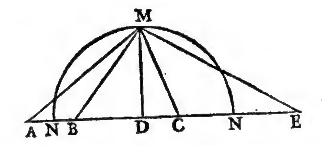
PROPOSITIO I. Generalis.

EXponatur superior figura & sint data quatuor puncta in recta A E, A, B, C, E, esto A D, quarta pars (conditionaria nempe) rectarum A B, A C, A E, & sit datum Z, planum. Proponitur invenire circulum in quo sumendo quodlibet punctum, & ab eo jungendo rectas ad puncta data quadrata junctarum simul sumpta æquentur spa-

tio dato, Z, planum debet esse majus quatuor quadratis A D, E D, C D, E D, ut locum habeat propositio ex superius demonstratis.

Argueretur igitur quatuor illis quadratis, & præterea quadruplo quadrati D N, centro D, intervallo D N, descriptus circulus præstabit propositum.

Nam sumatur primo punctum N, ex utravis parte, demonstratum est secundo Lemmate quadrata A N, B N, C N, E N, æquari quadratis, A D, B D, C D, E D, & præterea quadrato D N, quater, at quadrata A D, B D, C D, E D, unâ cum quadrato D N, quater æquantur Z, plano, ergo quadrata quatuor A N, B N, C N, E N, æquan-



tur Z, plano, hoc est spatio dato quod erat demonstrandum.

Excitetur deinde perpendicularis D M, & jungantur A M, B M, C M, E M. Aio quatuor illa quadrata æquari spatio dato Z, plano, nam quadratum A M, æquatur quadrato A D, & quadrato D M.

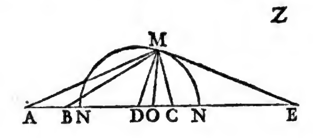
Quadratum B M, æquatur quadrato B D, & quadrato D M.

Quadratum C M, æquatur quadrato C D, & quadrato D M.

Quadratum E M, æquatur quadrato E D, & quadrato, D M.

Ergò quatuor quadrata A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis quatuor A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D M, sivè D N, quater, ut quadrata A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater æquantur Z. plano seu spatio dato, ergo quadrata quatuor A M, B M, C M, E M, æquantur spatio dato, quod erat demonstrandum.

Sed sumatur ubicumque punctum M, à quo demittatur perpendicularis M O, Similiter probabitur quadrata A M, B M, C M, E M, æquari quadratis A O, B O,



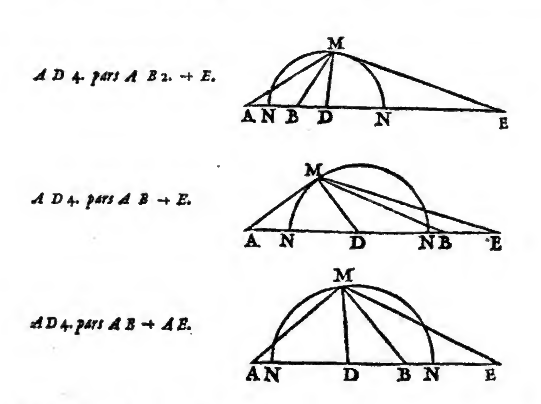
C O, E O, quæ ex secundo lemmate æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, & præterea quadrato O D, quater, ergo quadrata quatuor A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato O D, quater, & præterea quadrato O M, quater, sed quadratum O D, quater, unà cum quadrato O M, quater æquatur quadrato D M, quater sive quadrato D N, quater, sunt enim D M, D N, ex centro æquales inter se, igitur quadrata A M, B M, C M, E M, æquantur quadratis A D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D N, quater, ideoque spatio dato Z, plano sunt æqualia, quod erat demonstrandum.

Si compleantur circuli, eadem demonstratio in aliis semicirculis locum habebit, &

ad quotlibet puncta eadem facilitate & argumentatione extendetur, semper enim toties sumentur quadrata D M, D N, D O, quot erunt puncta nec fallet ratiocinatio.

Inde sequitur corollarium cujus usus in sequenti propositione.

Exponantur quotlibet puncta data, verbi gratia, tria A, B, E, & inveniendus circulus D N M, in quo sumendo quodlibet punctum ut M, & jungendo rectas A M,



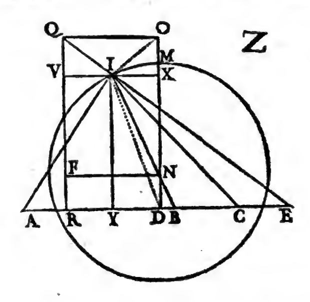
B M, E M, quadrati A M, duplum (verbi gratia) una cum quadratis B M, E M, æquentur spatio dato, eo casu sumenda est ad constructionem recta A D, pars quarta rectarum A B, A E, quia hoc casu punctum A, gerit vicem duorum punctorum & idem est ac si diceretur datis punctis quatuor A, A, B, E, invenire circulum N M, in quo sumendo quodlibet punctum ut M, quadrata quatuor A M, A M, B M, E M, æquentur spatio dato, idem est intelligendum in alio quovis puncto, & alia qualibet ratione multiplici, nam proponatur quadratum A M, una cum quadrato E M, bis, & quadrato E M, æquari spatio dato, sumenda est A D, quarta pars rectarum A B, bis & A E, quod advertisse & monuisse fuit necesse, nec indiget res majori explicatione.

PROPOSITIO ALTERA.

EXPONANTUR quotlibet puncta data in recta A E, quatuor (verbi gratia) A, B, C, E, & punctum Z. extra rectam A E, quæritur circulus ut M I, in quo sumendo quodlibet punctum ut I. quadrata A I, B I, C I, E I, Z I, æquentur spatio dato.

Demittatur in rectam A E, perpendicularis Z R, & rectarum A R, A B, A C, AE, sumatur pars conditionaria (quintans nempe in hac specie in qua dantur quinque puncta) A D, & excitata perpendiculari D O, demittatur in ipsam perpendicularis Z O, rectæ Z R, sumatur pars conditionaria (quintans nempe) R F, sive D N, & sit spatium datum æquale quinque quadratis A D, R D, B D, C D, E D, & præterea Z,

plano Z, planum æquetur D N, quater (pro numero nempe punctorum in recta A E, datorum) quadrato N O, & prætereaquadrato N M, quinquies, (pro nume-



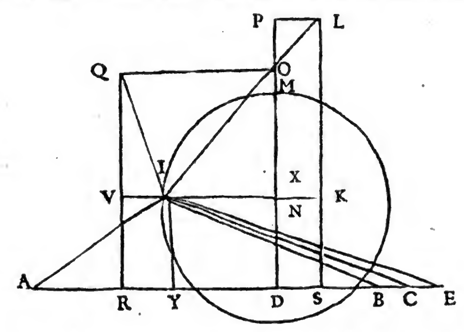
ro omnium punctorum datorum) aio circulum centro N, intervallo N M, descriptum præstare propositum: sumatur in eo quodlibet punctum ut I, & junctis A I, B I, C I, E I, Q I, ducatur V I X, parallela A E, & I Y, parallelá O D, patet quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquari Z, plano ex corollario præcedentis propositionis, punctum enim D, gerit vicem quatuor punctorum, cum igitur D N, sit quintans O D, patet quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquari quadrato D N, quater, quadrato O N, & quintuplo quadrati N M, sed per constructionem quadratum D N, quater una cum quadrato O N, & quintuplo quadrati N M, æquatur Z, plano. Ergo quadratum D I, quater unà cum quadrato O I, æquatur Z, plano.

Sed quadratum D I, quater æquatur quadrato D X, quater, & quadrato X I, quater, & quadratum O I, æquatur quadrato O X, & quadrato X I, ergo Z, planum æquatur quadrato D X, sive I Y, quater quadrato X O, sive V Q. semel & quadrato XI, quinquies, addantur utrinque quadrata quinque A D, R D, B D, C D, E D, fiet inde spatium datum, hæc enim quinque quadrata, cum Z, plano, ex hypothesi æquantur spatio dato, inde verò quinque, quadratis A I, B I, C I, E I, Q I, quæ proinde æquabuntur spatio dato; hoc ut constet ex 2. lemmate quadrata A D, R D, B D, C D, E D, unà cum quadrato D Y, quinquies, æquabuntur quadratis A Y, R Y, B Y, C Y, E Y, igitur quadrata A D, R D, B D, C D, E D, addita quadrato I Y, quater, V Q, semel, & D I, quinquies æquabuntur quadratis A Y, R Y, B Y, C Y, E Y, unà cum I Y, quater, & V Q, semel singulis quadratis A Y, B Y, C Y, E Y, addatur quadratum I Y, fient quadrata ta A I, B I, C I, E I, æqualia quadratis A Y, B Y, C Y, E Y, & præterea quadrato I Y, quater, igitur quadrata A D, R D, B D, C D, E D, addita quadrato I Y, quater V Q. semel & D Y, quinquies æquabuntur quadratis A I, B I, C I, I E, & præterea quadrato R Y, & quadrato V Q. semel. Sed quadratum R Y, sive Q I, unà cum quadrato Q V, æquatur quadrato Q I, igitur quadrata A R, R D, B D, C D, addita quadrato I Y, quater, V Q, semel, & D Y, quinquies æquabuntur quadratis A I, B I, C I, E I, & Q I, at probandum est quadrata illa o mnia æquari spatio dato. Ergò quadrata quinque A I, B I, C I, E I, & Q I, æquantur spatio dato, quod erat demonstrandum.

Inde facillimè deducitur spatium datum æquari quadratis A N, B N, C N, E N, Q N,

& quintuplo quadrati N M, quod tanquam facile prætermittimus.

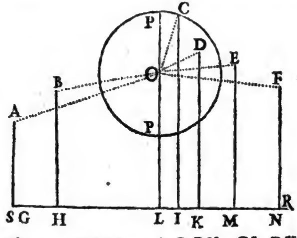
Imò & ad quotlibet puncta producetur artificium eadem ratione, si enim dentur duo puncta Q, & L, extra lineam, perfectâ constructione, ut vides, sumetur A D,



sextans rectarum A R, A S, A B, A C, A E, rectarum Q R, & L S, sextans D N, sumetur, spatium datum fiet æquale quadratis A D, R D, S D, B D, C D, E D, & præterea quadraro D N, quater, N O, semel, N P, semel & N M, sexties, & reliqua perficientur eadem ratione, semperque punctum B, vicem geret omnium punctorum in rectâ A E, datorum, & puncta P O, vicem gerent datorum punctorum Q, & L, & cætera in infinitum uniformi methodo conserventur, & demonstrabuntur.

Sed quoniam multiplices casus oriuntur ex diversâ rectæ assumptæ duo vel plura puncta contingentis positione, dum puncta reliqua diversas ex parte qualibet rectâ assignata sortiuntur positiones. (licèt unicuique casui sua competant compendia) placet in artis specimen generaliùs ostendere & construere.

Dentur quotlibet puncta A, B, C, D, E, F, sive in eadem recta sive in diversis, sumatur in eodem plano recta quævis S R, ita ut omnia puncta data sint ex una



parte rectæ S R, demissis perpendicularibus A G, B H, C I, D K, E M, F N, sumatur rectarum G H, G I, G K, G M, & G N, pars conditionata sextans nempe in hoc casu, excitetur perpendicularis L O, à qua resecetur L O, pars conditionaria sex-

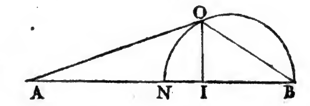
sextans nempe rectarum A G, B H, C I, K D, E M, F N, & sit spatium datum æquale quadratis A O, B O, C O, D O, E O, F O, & sextuplo quadrati O P, circulus centro, O, intervallo O P, descriptus satisfaciet propositioni, nec difficilis est inventio ei qui superiores noverit.

PROPOSITIO VI.

SI à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad positione ductam lineam abscissa à recta linea positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei quod à data & abscissâ continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.

Descripsi propositionem quemadmodum reperitur apud Pappum ex versione Federici Commandini, sed vel in textu græco vel in interpretatione mendum esse non dubito. Sensum propositionis exponam.

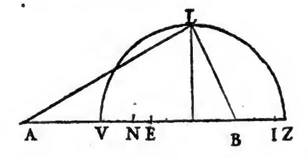
Sint duo puncta A, & B, oportet invenire circumferentiam ut N, O, B, in qua sumendo quodlibet punctum ut O, & jungendo rectas O A, O B, & demittendo



perpendicularem O I, rectangulum sub recta data in A I, æquetur duobus quadratis A O, O B, sit primum A, B, recta data, qui casus satis est facilis, sumatur ipsius A B, dimidium B N, superque B N, semicirculus describatur, aio satisfacere proposito, hoc est si sumatur, verbi gratia, punctum O, rectangulum B A I, duobus quadratis A O, O B, æquale esse; nam A O, quadratum æquatur A I, quadrato & I O, quadrato si à rectangulo B A I, auferatur quadratum A I, & quadratum I O, sivè rectangulum B I, in I N, superest rectangulum sub B I, in A N, sive in N B, quod probandum est esse æquale quadrato B O, & patet ex constructione ita se habere.

Secundus casus est quando recta data major est rectâ A B, cujus constructionem dabimus modo recta data sit minor duplâ A B.

Sint data duo puncta A, & B, & recta A I, duplâ A B, minor ex hypotesi; oportet



facere quod proponitur. Recta A B, bifariam secetur in N, & fiat N E, ipsius B I, dimidia quod ex constructione licet, rectangulum I B N, ad rectam B E, applicetur, excedens figurâ quadratâ, & faciat latitudinem rectam E V, cui fiat æqualis recta BZ, & super V Z, describatur semicirculus V L Z, aio satisfacere proposito, nam junctis

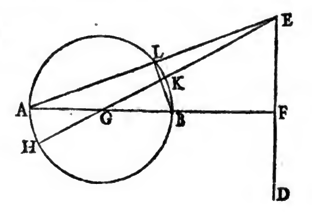
L A, L B, & demissâ perpendiculari L O, cujus primus casus sit inter, E, & B, patet ex demonstratis ad propositionem tertiam Appollonij triangulum E O B, unà cum rectangulo V E Z, sive N B I, æquari quadrato, O L, addatur utrinque quadratum O B, rectangulum E B O, unà cum N BI, æquabitur quadrato L O, & quadrato O B, duplicetur rectangulum E B O, bis, unà cum rectangulo N B I, bis, sive solo A B I, æquabuntur quadratis L O, O B, bis, sive A B, in B O, semel unâ cum A B, in B I, æquabuntur quadratis L O, O B, bis, una cum rectangulo sub N E, in O B, bis, sive I B O, semel, ex constructione utrinque auferetur quadratum O B, supererit A O B, unà cum A B I, æquale quadrato L O, bis, quadrato O B, semel, & rectangulo I B O, utrinque I B, in B O, auferatur nempe illinc ex rectangulo A B I, supererit A O, in O B, unà cum A O, in B I, sine solum rectangulum I O A, æquale quadrato L O, bis & quadrato O B, semel, Addatur utrinqs quadratum A O, erit rectangulum I O A, quadrato A O, O B, unà cum L O, quadrato bis, æquale, id est duobus tantùm quadratis, A L, & L B, quod erat faciendum. Ccasus alios prætermitto.

PROPOSITIO VII.

SI in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur, sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei quod à totâ & extra sumptâ, vel soli vel unà cum eo, quod duabus quæ intra circulum portionibus continetur, punctum extra sumptum positione datam rectam lineam continget.

Hæc propositio duas habet partes, quarum prior est apud ipsum Pappum propos. 157. libri septimi, secunda per additionem æqualium ex priore derivari facilè potest. Pappi igitur demonstrationem tantum adducemus.

Sit circulus circa diametrum A B, & A B, producatur sitque ad quamlibet rectam lineam D E, perpendicularis; rectangulo autem A F B, æquale ponatur quadratum ex



F G, dico si quodcunque sumatur punctum ut E, atque ab eo ad punctum G, recta linea ducta producatur ad H, rectangulum etiam H E K, quadrato ex E G, æquale esse, jungantur A E, B L, erit angulus ad L, rectus, sed & rectus qui ad F, rectangulum igitur A E L, est æquale, & rectangulo A F B, & quadrato ex F E, quoniam enim angulus A L B, rectus est, æqualis recto A F E, sunt quatuor puncta L, B, F, E, in circulo ac propterea rectangulum F A B, æquale rectangulo E A L, quadratum autem ex A E, est æquale duobus quadratis A F, F E, sed quadrato ex A E, æqualia sunt utraque rectangula A E L, E A L, & similiter quadrato ex A F, æqualia utraque rectangula A F B, F A B, ergo rectangula A E L, E A L, æqualia sunt rectangulis A F B, F A B, & qua-

drato ex F E, quorum rectangulum F A B, est æquale rectangulo E A L, reliquum igitur rectangulum A E L, rectangulo A F B, & quadrato ex F E, æquale erit, rectangulum autem A E L, æquale est rectangulo H E K, & rectangulum A F B, quadrato ex F G, ergo rectangulum H E K, quadratis ex E F, E G, hoc est quadrato ex E G, est æquale.

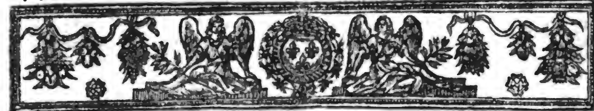
PROPOSITIO VIII. & Ultima.

ET si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam circulus autem non ponatur, quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam.

Hæc propositio est conversa præcedentis & ex ea facile elici potest hujus demonstratio si contraria viâ utamur.

Determinationes & casus non adjungimus quia ex constructione & demonstratione satis patent.

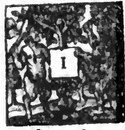




DE ÆQUATIONUM LOCALIUM TRANSmutatione, & emendatione, ad multimodam curvilineorum inter se, vel cum rectilineis comparationem.

CVI ANNECTITVR

PROPORTIONIS GEOMETRICÆ in quadrandis infinitis parabolis & hyperbolis usus.



IN unica paraboles quadraturâ proportionem geometricam usurpavit Archimedes. In reliquis quantitatum heterogenearum comparationibus, arithmeticæ dumtaxat proportioni sese adstrinxit. An ideo quia proportionem geometricam minùs τετραγωνίζειν est expertus? An verò quia peculiare ab illâ proportione petitum artificium ad quadrandam primariam parabolam, ad ulteriores derivari vix potest? Nos certe hujusmodi proportionem quadrationum feracissimam & agnoscimus, & experti sumus, & inventionem nostram quæ eadem omnino methodo & parabolas & hyperbolas quadrat, recentioribus geometris haud illibenter impertimur.

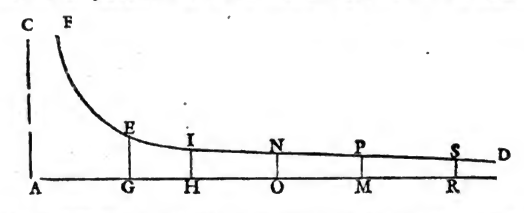
Unico quod notissimum est proportionis geometricæ attributo, tota hæc methodus innititur.

Theorema hoc est: Datâ quavis proportione geometricâ cujus termini decrescant in infinitum, est ut differentia terminorum progressionem constituentium, ad minorem terminum, ita maximus progressionis terminus ad reliquos omnes in infinitum sumptos.

Hoc posito, proponantur primo hyperbolæ quadrandæ. Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas, ut D S E F, quarum hæc est proprietas, ut positis in quolibet angulo dato R A C, ipsarum asymptotis rectis A R, A C, in infinitum, si placet, non secùs ac ipsa curva extendendis, & ductis uni asymptotωn parallelis rectis quibuslibet G E, H I, O N, M P, R S, &c. sit ut potestas quædam rectæ A H, ad potestatem similem rectæ A G, ita potestas rectæ G E, vel similis vel diversa à præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ H I, potestates autem intelligimus, non so-

lùm quadrata, cubos, quadratoquadrata, &c. quarum exponentes sunt. 2. 3. & 4. &c. sed etiam latera simplicia, quorum exponens est unitas. Aio itaque omnes in infinitum hujusmodi hyperbolas, unicâ demptâ, quæ Apolloniana est, sive primaria, beneficio proportionis geometricæ uniformi & perpetua methodo quadrari posse.

Exponatur, si placet, hyperbola, cujus ea sit proprietas, ut sit semper ut quadratum rectæ H A, ad quadratum rectæ A G, ita recta G E, ad rectam H I, & ut quadratum



O A, ad quadratum A H, ita recta H I, ad rectam O N, &c. Aio spatium infinitum, cujus basis G E, & curva E S, ex uno latere, ex alio vero asymptotos infinita G O R, æquari spatio rectilineo dato. Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit A G, secundus A H, tertius A O, &c. in infinitum, & ad se se per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut juxta Methodum Archimedæam, parallelogrammum rectilineum sub GE, in G H, quadrilineo mixto G H F, adæquetur, ut loquitur Diophantus, aut ferè æquetur.

G E, in G H.

Item ut priora ex intervallis rectis proportionalium G H, H O, O M, & similia sint ferè inter se æqualia, ut commodè per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones & inscriptiones Archimedæa demonstrandi ratio institui possit, quod semel monuisse sufficiat, ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius & iterare cogamur.

His positis, cum sit ut A G, ad A H, ita A H, A O, & ita A O ad A M, erit pariter ut A G, ad A H: ita intervallum G H, ad H O, & ita intervallum H O, ad O M, &c. Parallelogrammum autem sub E G, in G H, erit ad parallelogrammum sub H I, in H O, ut parallelogrammum sub H I, in H O, ad parallelogrammum sub N O, in O M, cùm enim ratio parallelogralemi sub G E, in G H, ad parallogrammum sub H I, in H O, componatur ex ratione rectæ G E, ad rectam H I, & ex ratione rectæ G H, ad rectam H O: sit autem ut G H, ad H O, ita A G, ad A H, ut præmonuimus. Ergo ratio parallelogrammi sub E G, & G H, ad parallelogrammum sub H I, in H O, componitur ex ratione G E, ad H I, & ex ratione A G, ad A H, sed ut G E, ad H I, ita ex constructione H A, quadratum, ad quadratum G A, sive propter proportionales: ita recta A O, ad rectam G A. Ergo ratio parallelogrammi sub E G, in G H, ad parallelogrammum sub H I, in H O, componitur ex ratione A O, ad A G, & A G, ad A H, sed ratio A O ad A H, componitur ex illis duabus. Ergo parallelogrammum sub G E, in G H, est ad parallelogrammum sub H I, in H O, ut O A, ad H A; sive ut H A, ad A G.

Similiter probabitur parallelogrammum sub H I, in H O, esse ad parallelogrammum sub O N, in O M, ut A O, ad H A, sed tres rectæ quæ constituunt rationes parallelogrammotum, rectæ nempe A O, H A. G A, sunt proportionales ex constructione.

Ergo parallelogramma in infinitum sumpta sub G E, in G H, sub H I, in H O, sub O N, in O M, &c. erunt semper continuè proportionalia in ratione rectæ H A, ad G A. Est igitur ex theoremate hujus methodi constitutivo ut G H, differentia terminorum rationis ad minorem terminum G A, ita primus parallelogrammorum progressionis terminus, hoc est parallelogrammum sub E G, in G H, ad reliquos in infinitum parallelogrammos, hoc est ex adæquatione Archimedæa ad figuram sub H I, asymptoto H R, & curvâ in I N D, in infinitum extendendâ contentam. Sed ut H G, ad G A, ita sumptâ communi latitudine recta G E, parallelogrammum sub G E, in G H, ad parallelogrammum sub G E in G A. Est igitur ut parallelogrammum sub G E, in G H, ad figuram illam infinitam, cujus basis H I, ita idem parallelogrammum sub G E, in G H, ad parallelogrammum sub G E, in G A, ergo parallelogrammum sub G E, in G A, quod est spatium rectilineum datum, adæquatur figuræ prædictæ. Cui si addas parallelogrammum sub G E, in G H, quod propter minutissimos τμηματίων evanescit & abit in nihilum, superest verissimum, & Archimedæâ licet prolixiore demonstratione facillimè firmandum, parallelogrammum A E, in hac hyperbolæ specie, æquari figuræ sub base G E, asymptoto G R, & curvâ E D, in infinitum producendâ contentæ. Nec operosum ad omnes omnino hujusmodi hyperbolas, unâ, ut diximus, demptâ, inventionem extendere.

Sit enim ea alterius, si placet, hyperbolæ proprietas, ut sit G E, ad H I, ut cubus rectæ H A, ad cubum rectæ G A, & sic de reliquis. Expositâ ex more infinitâ proportionalium, ut supra serie fient proportionalia parallelogramma E H, I O, M N, ut suprà in infinitum. In hoc verò casu parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, &c. ut recta A O, ad G A, quod statim compositio proportionum manifestabit. Erit igitur ut parallelogrammum E H, ad figuram, ita recta O G, ad G A, & sumptâ communi latitudine G E, ita parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G A, est igitur ut parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G H, ita parallelogrammum sub G E, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G H, ita parallelogrammum sub G E, in G H, ad figuram & vicissim ut parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub G E, in G H, ita parallelogrammum sub G E, in G A, ad figuram. Ut autem parallelogrammum sub O G, in G E, ad parallelogrammum sub H G, in G E; ita O G, ad G H, sive 2. ad 1. ea adæquatione, intervalla enim basi proxima facta sunt ex constructione ferè æqualia. Inter se ergo in hac hyperbola parallelogrammum E G A, quod est æquale spatio rectilineo dato, est duplum figuræ sub base G E, asymptoto G R, curva E S D, in infinitum producenda contentæ.

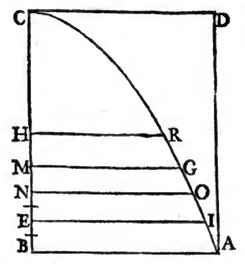
Similis in quibuslibet aliis casibus habebit locum demonstratio, nisi quod in primaria, sive Apolloniana & simplici hyperbola deficit eâ solâ ratione methodus; quia in hac parallelogramma E H, I O, N M, sunt semper inter se æqualia; atque ideo cum termini progressionis constitutivi, sint inter se æquales, nulla inter eos est differentia, quæ totum in hoc negotio conficit mysterium.

Demonstrationem quâ probatur spatia in hyperbola communi parallelogrammis contenta, esse semper inter se æqualia, non adjungimus, cùm statim per se ipsa se prodat; & ex hac unica proprietate quæ asserit in ea specie esse ut G E, ad H I, ita H A, ad G A, facillimè derivetur.

Eadem ratione parabolæ omnes omnino quadrantur, nec est ulla quæ ab artificio nostræ methodi, ut fit in hyperbolis, possit esse immunis.

Unicum in parabola, si lubet, primariâ & Apollonianâ adjiciemus exemplum, cujus exemplo reliquæ omnes in quibuslibet in infinitum parabolis demonstrationes expedientur.

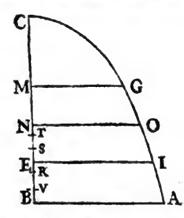
Sit semiparabole primaria A G R E, cujus diameter C B, semibasis A B, sumptis autem applicatis I E, O N, G M, &c. sit semper ut quadratum A B, ad quadratum



I E, ita recta B C, ad C E, & ut quadratum I E, ad quadratum O N, ita recta E C, ad C N, & sic in infinitum ex proprietate specificæ paraboles Apollonianæ. Intelligantur ex more methodi rectæ B C, E C, N C, M C, H C, &c. in infinitum continuè proportionales. Erunt etiam, ut superius probatum est, proportionalia parallelogramma, A E, I N, O M, G H, &c. in infinitum. Ut cognoscatur ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, recurrendum ex methodo ad compositionem proportionum, componitur autem ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, ex ratione A B, ad I E, & ex ratione B E, ad E N. Cum autem sit ut A B, quadratum, ad I E, quadratum, ita B C, ad C E, si inter B C, & C E sumatur media proportionalis C V, item inter E C, & N C, media proportionalis Y C, erunt continuè proportionales rectæ B C, V C, E C, Y C, N C, & ut B C, ad E C, ita erit B C, quadratum ad V C, quadratum, sed ut B C, ad E C; ita quadratum A B, ad quadratum E I, Ergo ut A B, quadratum ad E I, quadratum, ita erit B C, quadratum ad V C, quadratum: & ut A B, ad I E, ita erit B C, ad V C, ratio igitur parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, componetur ex ratione B C, ad V C, sive V C, ad C E, sive E C ad Y C; & ex ratione B E, ad E V, sive ex superius demonstratis B C, ad CE, Ratio autem quæ componitur ex his duabus rationibus, B C, nempe ad C E, & C E, ad C Y, est eadem quæ ratio B C, ad C Y, igitur parallelogrammum A E, est ad parallelogrammum I N, ut B C, ad Y C, ideoque ex theoremate methodi constitutivo, parallelogrammum A E, erit ad figuram I R C H E, ut recta B Y, ad rectam B C, ideoque ut idem parallelogrammum A E, ad totam figuram A I G R C B, ita recta B Y, ad totam diametrum B C, ut autem recta B Y, ad totam diametrum B C, ita sumptâ communi latitudine A B, parallelogrammum sub A B in B Y, ad parallelogrammum sub A B, in B C, sive parallelogrammum B D, ductâ A D, diametro parallelâ occurrente tangenti C D, in D, ergo ut parallelogrammum A E, ad totam figuram semiparabolicam A R C B; ita parallelogrammum sub A B, in B Y, ad parallelogrammum B D, & vicissim ut parallelogrammum A E, ad parallelogrammum sub A B, in B Y; ita figura ad parallelogrammum B D, ut autem parallelogrammum A E, ad parallelogrammum sub A B, in B Y, ita propter communem latitudinem recta B E, ad B Y, ergo ut B E, ad B Y, ita figura ad parallelogrammum; & convertendo ut B Y, ad B E, ita parallelogrammum B D, ad figuram A R O B; est autem B Y, ad B E, propter adæqualitatem & sectiones minutissimas, quæ rectas B V, V E, E Y, intervalla proportionalium repræsentates, ferè inter se supponit æquales, ut 3. ad

2. Ergoparallelogrammum B D, ad figuram est ut 3. ad 2. quæ ratio congruit τετραγωνισμῷ paraboles Archimedæo, licet ab eo geometrica proportio aliâ ratione fuerit usurpata; Methodum autem variare, & diversam ab Archimede viam sectari necessum habuimus, quia sterilem proportionis geometricæ ad quadrandas cæteras in infinitum parabolas applicationem deprehensam iri, insistendo vestigiis tanti viri non dubitamus. Demonstratio autem & regulæ generales ex nostra methodo ferè in omnibus omnino parabolis statim patebunt.

Sit enim, ut nullus ampliùs supersit dubitandi locus parabole ea de qua mentionem fecit dissertatio nostra de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione, curva



A I C B, cujus basis A B, diameter B C, & sit ut cubus applicatæ A B, ad cubum applicatæ I E, ita quadratum rectæ B C, ad quadratum rectæ E C, & reliqua ponantur ut supra; series nempe proportionalium rectarum B C, E C, N C, M C, &c. item series proportionalium parallelogrammorum A E, I N, O M, &c. in infinitum. Inter B C, & E C, sumantur duæ mediæ proportionales V C, R C, item inter E C, & C N, sumantur etiam duæ mediæ proportionales S C, T C, constat ex constructione, cum ratio B C, ad E C, sit eadem rationi E C, ad N C, fore quoque continuè proportionales rectas B C, V C, R C, E C S C, T C, N C. Est autem ut A B, cubus ad cubum I E, ita B C, quadratum ad E C, quadratum, sive recta B C, ad rectam N C. Cum autem sint, ut supra probavimus, septem continuè proportionales, B C, V C, R C, E C, S C, T C, N C, ergo prima, tertia, quinta & septima erunt etiam continuè proportionales, ideoque erit B C, ad R C, ut R C ad S C, & ut S C, ad N C. Ut igitur prima B C, ad quartam N C, ita cubus primæ B C, ad cubum secundæ R C, sed ut B C, ad N C, ita probavimus esse cubum A B, ad cubum I E. Ergo ut cubus A B, ad cubum I E, ita cubus B C, ad cubum R C; ideoque ut A B, ad I E, ita B C, ad R C. Cum igitur ratio parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, componatur ex ratione A B, ad I E, & ex ratione B E, ad E N, sive B C, ad E C, ergo eadem parallelogrammorum ratio componetur ex ratione B C, ad R C, & B C, ad E C. Ut autem B C, prima proportionalium ad E C, quartam, ita R C, tertia ad T C, sextam. Ergo parallelogrammi A E, ad parallelogrammum I N, ratio componitur ex ratione B C, ad R C, & R C, ad T C: hoc est parallelogrammum A E, est ad parallelogrammum I N, ut B C, ad T C, parallelogrammum igitur A E, ex prædemonstratis, est ad figuram I G C E, ut recta B T, ad T C; ideoque ut parallelogrammum A E, ad totam figuram A I C B, ita recta B T, ad rectam B C, sive sumpta communi latitudine A B, ita parallelogrammum sub A B, in B T, ad parallelogrammum sub A B, in B C. Et vicissim & convertendo, ut parallelogrammum B D, est ad figuram A I C B, ut parallelogrammum sub A B, in B T, ad parallelogrammum sub A B, in B E, sive propter communem latitudinem A B, ut recta B T, ad rectam B E, recta autem B T, continet quinque intervalla T S, S E, E R, R V, V B, quæ inter se propter nostram methodum logarithmicam censentur æqualia. Recta autem B E, continet tria ex iis intervallis,

nempe

nempe ER, RV, V B. Ergo paralellogrammum BD, eſt ad totam figuram in hoc caſu ut 5. ad 3.

Canon verò univerſalis inde nullo negotio elicietur. Patet nempe fore ſemper parallelogrammum B D. ad figuram AICB, ut aggregatum exponentium poteſtatum applicatæ & Diametri ad exponentem poteſtatis applicatæ, ut in hoc exemplo videre eſt, in quo poteſtas applicatæ AB, eſt cubus, cujus exponens 3. poteſtas autem diametri eſt quadratum, cujus exponens 2. Ergo debet eſſe, ut jam demonſtravimus, & perpetuò conſtabit, ut ſumma 3. & 2. hoc eſt 5. ad 3. exponentem applicatæ.

In hyperbolis autem canon non minori facilitate invenietur univerſalis. Erit enim ſemper in quacunque hyperbola, ſi recurras ad primam figuram, parallelogrammum BG, ad figuram in infinitum protenſam, RGED, ut differentia exponentium poteſtatum applicatæ & diametri ad exponentem poteſtatis applicatæ. Sit enim, exempli gratiâ, ut cubus HA ad cubum G A, ita quadratum. G E, ad quadratum H I, differentia exponentium cubi & quadrati hæc eſt. 3. & 2. erit 1. Exponens autem quantitatis applicatæ, hoc eſt quadrati, eſt 2. Ergo in hoc caſu parallelogrammum erit ad figuram, ut 1. ad 2.

Quod attinet ad centra gravitatis, & tangentes, tam hyperbolarum, quàm parabolarum, inventio dudùm ex noſtra methodo de maximis & minimis derivata, Geometris recentioribus innotuit, hoc eſt ante viginti, plus minus annos. Quod celebriores totius Galliæ Mathematici non gravabuntur fortaſſe exteris indicare, ne hac de re in poſterum dubitent.

Ex ſupradictis mirum, quantam opus tetragoniſmicum conſequatur acceſſionem. Infinitæ enim exinde figuræ curvis contentæ de quibus nihil adhuc, nec veteribus, nec novis Geometris in mentem venit, facillimam ſortiuntur quadraturam. Quod in quaſdam regulas breviter contrahemus.

Sit curva, cujus proprietas det æquationem ſequentem B, quad. — A, quad. æquale E, quad. (apparet autem ſtatim hanc curvam eſſe circulum.) Certum eſt poteſtatem ignotam E, quad. poſſe reduci per applicationem ſeu paraboliſmum ad latus. Poſſumus enim ſupponere E, quad. æquari B, in V, cùm ſit liberum quantitatem ignotam V, in notam B, ductam æquare quadrato E, etiam ignotæ. Hoc poſito B, quad. A, — quad. æquabitur B, in V. Homogeneum autem B in V, ex tot quantitatibus homogeneis componi poteſt, quot ſunt in parte æquationis correlativâ, jiſdemque ſignis hujuſmodi homogenea debent notari. Supponatur igitur B in V, æquari B in I B, in Y. Ex more enim Vietæo, vocales ſemper pro quantitatibus ignotis ſumimus. Ergo B, quad. — A, quad. æquatur B in I, — B in Y, æquentur ſingula membra partis unius ſingulis membris partis alterius Sit nempe B, quad. æquale B, in I, Ergò dabitur I, æqualis B, æquetur deinde — AG, — B, in Y, hoc eſt A quad. B in Y, erit extremum punctum rectæ Y ad parabolen primariam. Omnia igitur in hoc caſu ad quadratum reduci poſſunt: ideoque ſi omnia E, quad. ad rectam lineam datam applices, fiet ſolidum rectilineum datum & cognitum.

Proponatur deinde curva, cujus, hæc ſit æquatio A cub. + B, in A, quad. æquale E, cub. E, cub. applicetur ad planum datum, & ſit, verbi gratiâ, æquale B, quad. in V. Quia autem recta V, ex pluribus quantitatibus ignotis componi poteſt. Sit A, cub. + B in A, quad. æquale B, quad. in I + B quad. in Y. æquentur ſingula inter ſe membra, hoc eſt A cub. æquetur B. quad. in I, orietur inde parabole ſub cubo & latere. æquetur deinde B in A, quad. ſecundo membro, B, quad. in Y, orietur inde parabole ſub quad. & latere, hoc eſt primaria, quadrantur autem ſingulæ ex his parabolis. Ergo aggregatum E, cuborum ad rectam datam applicatorum producit plano-planum quantitatibus ejuſdem gradus rectilineis commodè æquandum.

Si ſint plura in æquationibus membra, imò & ſub plerisque utriuſque quantitatis ignotæ gradibus involuta, ad eamdem ut plurimum methodum reductionum legitimarum ope poterunt aptari.

Ex his patet, ſi in priori æquatione in qua B, quad. — A quad. æquavimus E, quad

G.

loco ipſius E, quad. ponamus B in V, poſſe nos aggregatum omnium V, ad rectam datam applicatarum conſiderare tanquam planum, & quadrare. Omnes enim V, nihil aliud ſunt quàm omnia E quad. diviſa per B rectam datam. Item in ſecunda æquatione omnes V, nihil aliud ſunt quàm omnes E cubi diviſi per B, quadratum datum. Igitur tam in prima quàm in ſecunda figura omnes V, faciunt figuram æqualem ſpatio rectilineo dato.

Hoc autem opus fit per ſynæreſim, & expeditur, ut patet, per parabolas.

Sed non minus quadrationum ferax eſt opus per diæreſim quod per hyperbolas, aut ſolas, aut parabolis mixtas, commodè pariter expeditur.

Proponatur, ſi placet, curva ab æquatione ſequenti oriunda.

$$\frac{\text{B, cub. cub.} + \text{B QC in A,} + \text{A cub. cub.}}{\text{A quad. quadr.}} \propto \text{E quad.}$$

Ex jam ſuppoſitis E quad. poteſt fingi æquale B in V, ſive ut tria hinc & inde membra ſint in utraque parte æquationis. B in V, poteſt æquari B in O, + B in I, + B in Y Quo peracto.

$$\frac{\text{B cub. cub.} + \text{B QV cub. in A} + \text{A cub. cub.}}{\text{A quad. quadr.}} \text{ æquabitur.}$$

B in O. + B in I + B in Y. Et æquando ſingula membra ſingulis $\frac{\text{B cub. cub.}}{\text{A Q Q.}}$ æquabitur B in O.

Et omnibus in A, qu. qu. ductis B, cub. cub. æquabitur A qu. qu. in B in O. Et omnibus abs B diviſis B. quad. cub. æquabitur A qu. qua. in O. quæ eſt æquatio ad unam ex hyperbolis, ut patet. Æquationes enim hyperbolarum conſtitutivæ continent ex una parte quantitatem datam; ex aliâ verò id quod fit ſub poteſtatibus duarum quantitatum ignotarum.

Secundum membrum æquationis dat $\frac{\text{B Q C in A.}}{\text{A qu. qu.}}$ Sive $\frac{\text{B, qu. cub.}}{\text{A cub.}}$ æquale B in I.

Et omnibus in A cub. ductis & abs B diviſis, fit B qu. qu. æquale A cub, in I, quæ eſt æquatio alterius hyperbolæ à priore diverſæ. Denique tertium membrum eſt $\frac{\text{A cub. cub.}}{\text{A qua. qua.}}$

Hoc eſt A, qu. æquale B, in Y, quæ eſt æquatio ad parabolen.

Patet itaque in præcedente æquatione omnes V, ad rectam datam applicatas æquari ſpatio rectilineo dato. Summa enim duarum hyperbolarum quadrationi obnoxiarum, & unius parabolæ dant ſpatium æquale rectilineo vel quadrato dato.

Nihil autem vetat quominus ſingula membra numeratoris ſeparatim denominatori applicemus,, ut jam factum eſt. Eodem enim res recidit, quò ſi integrum numeratorem ex tribus membris compoſitum eidem denominatori ſemel applicemus. Ita enim ſingula æquationis membra ſingulis homogenei correlatis poſſunt commodè comparari.

Proponatur etiam $\frac{\text{B, qu. cub. in A,} - \text{B, cub. cub.}}{\text{A cub.}}$ Æquari E cub.

Fingatur E cub. æquari B, qu. in V, ſive propter duo membra homogenei correlati B, qua. in I, + B, qu. in Y. Fiet $\frac{\text{B qu. cub. in A,}}{\text{A cub.}}$ ſive $\frac{\text{B qu. cu.}}{\text{A Q.}}$ æquale B qu. in I.

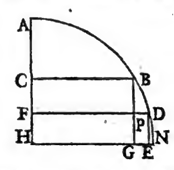
& omnibus in A qu. ductis, & abs B, qu. divisis, fiet B, cub. æquale A, qu. in I. quæ est æquatio ad unam de hyperbolis quadrandis.

Ponatur deinde secundam homogenei membrum B, cub æquari B qu. in Y.

$\overline{\text{Acub.}}$

Igitur omnibus in A, cub. ductis & abs, B, qu. divisis fiet B, qu. qu. æquale A, cub. in Y, quæ est æquatio unius ex hyperbolis quadrationi obnoxiis constitutiva. Datur igitur recurrendo ad primam æquationem in rectilineis summa omnium E, cuborum in hac specie ad certam rectam datam applicatorum.

Sed & ulteriùs progredi, & opus tetragonismicum promovere nihil vetat.



Sit in quartâ figurâ curva quælibet, A B D N, cujus basis H N, diameter H A, applicatæ ad diametrum, C B, F D, & applicatæ ad basim, B G, D E, & decrescant semper applicatæ à base ad verticem, ut hic, H N, est major F D, & F D, major est C B, & sic semper. Figura composita ex quadratis H N, F D, C B, ad rectam A H, applicatis, hoc est solidum sub C B, quadrato in C A, & sub F D, quadrato in F C, & sub N H, quadrato in H F, æqualis est semper figuræ sub rectangulis B G, in G H, D E, in E H, bis sumptis, & ad basim H N, applicatis; hoc est solido sub B G, in G H, bis in G H, & sub D E, in E H, bis in E G, &c. utrimque in infinitum. In reliquis autem in infinitum præstantibus, eadem facilitate fit reductio homogeneorum ad diametrum, ad homogenea ad basim. Quæ observatio curvarum infinitarum hactenus ignoratum, detegit quadrationem.

Omnes enim cubi H N, F D, C B, ad rectam A H, similiter applicati, æquales sunt aggregato productorum ex B G, in G H, quadratum, & ex D E, in E H, quadratum ad rectam H N, similiter ut supra applicatorum, & ter sumptorum; hoc est planoplanum sub C B, cubo in C A, & sub D F, cubo in F G, & sub H N, cubo in H F, æquatur summæ planoplanorum ex B G, in G H, quadratum in H G, & ex D E, in E H, quadratum in E G, ter sumptæ.

Aggregatum verò quadrato quadratorum H N, F D, C B, ad rectam A H, applicatorum æquatur quadruplo summæ plano planorum sub B G, in G H, cubum, & sub D E, in E H, cubum ad rectam H N, similiter ut supra applicatorum.

Inde emananr infinitæ, ut statum patebit, quadraturæ.

Esto enim, si placet, curva illa A B D N, ejus naturæ, ut data base H N, & diametro H A, diameter data A H, vocetur in terminis analyticis B. Ipsa verò H N, basis data vocetur D. Quælibet applicato F D, vocetur E, & quælibet H F, vocetur A; & sit, verbi gratiâ, æquatio curvæ constitutiva B, quad. — A qu. æquale E, quad. (quod in circulo ita se habet:) Cùm ergo ex prædicto theoremate universali omnia E, quadrata, ad rectam B, applicata ad basim H N, sive ad D, applicatis, sint æqualia omnibus productis ex H G, in G B, sint autem omnia E, quadrata æqualia ad B, applicata spatio rectilineo curvo, ut superiùs probatum est. Ergo omnia producta ex H G, in G B, bis sumpta, & ad basim D, applicata, continent spatium rectilineum datum. Ergo sumendo dimidium, omnia producta ex H G, in G B, ad basim D, ap plicata,

G 2

erunt æqualia spatio rectilineo dato. Ut autem facillima, & nullis asymmetriis involuta fiat translatio prioris curvæ ad novam; ita constanti artificio, quæ est nostra methodus, operari debemus.

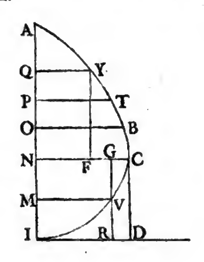
Sit quodlibet ex productis ad basim applicandis, H E, in E D, cum igitur F D, sive H E, ipsi parallela vocetur in analysi E, & F H, sivè D E, ipsi parallela vocetur A. Ergo productum sub H E, in E D, vocabitur E in A. Ponatur illud productum E in A, quod sub duabus ignotis & indefinitis rectis comprehenditur æquari B in V, sivè producto ex B, data in V, ignotam, & intelligatur E P, in directum ipsi D E, posita æquari V, Ergo $\frac{B \text{ in } V}{E}$, æquabitur A. Cum ergò B, qu. – A, quad. æquetur ex proprietate specifica prioris curvæ ipsi E, qu. Ergo subrogando in locum A, ipsius novum valorem $\frac{B, \text{ in } V}{E}$, fiet B, quad. in E, qu. – B, quad. in V, quad. æquale E, quad. quad. sive per antithesim B, quad. in E, qu. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. quæ est æquatio novæ H O P N, curvæ ex priori oriundæ constitutiva, in qua cum omnia producta ex B, in V, dentur, ut jam probatum est, si omnia ad B, applicentur dabitur summa omnium V, ad basim applicatarum. hoc est dabitur planum H O P N, rectilineis; ideoque ipsius quadratura.

Sit, secundi exempli gratiâ, æquatio prioris curvæ constitutiva B, in A, quad. – A cub. æquale E, cub. summa omnnium E, cuborum ad diametrum B, applicatorum dabitur: ideoque summa omnium productorum ex quadratis H E, in E D, ad basim applicatorum. Productum autem ex H E, quadrato in E D, fit in terminis analyticis E, quad, in A, quod fingatur æquari B, quad. in V, & recta. E P, ut supra, æqualis V, Ergò $\frac{B, \text{ quad. in } V,}{E \text{ quad.}}$ æquabitur A.

Si igitur in locum A, subrogemus jam agnitum illius valorem $\frac{B, \text{ quad. in } V.}{E \text{ quad.}}$

Et omnia juxta analyseos præcepta sequamur, fiet B, quad. cub. in V. quad. in E. quad. – E, cub. cub. cub æquale B, cub. cub. in V, cub. quæ est æquatio novæ H O P N, curvæ ex priore oriundæ constitutiva, in quâ cùm omnia producta B, qu. in V, ad basim D, applicata dentur, omnibus per B, quadratum datum divisis, dabitur summa omnium V, ad basim D, applicatarum ideoque quadratura figuræ H O P N, & est generalis ad omnes omnino casus extendenda in infinitum methodus.

Notandum porro, & accuratè advertendum in translationibus curvarum, quarum applicatæ ad diametrum versus basim decrescunt, aliam omnino viam analystis ineundam, à præcedenti diversam.



Sit enim in quinta figura prior curva I V C B T Y A, cujus diameter A I, applicatæ M V, N C, O B, P T, Q Y, & ejus curvæ ea sit natura, ut applicatæ versus basim M V, semper decrescant, donec ad basim perveniant, ita ut M V, sit minor quàm N C. Rursus autem ita curva versus A, per tramitem C B Y A, inflectatur, ut C N, sit major quam B O, B O, major quàm P T, P T, major quàm Q Y, &c. ita ut omnium applicatarum maxima sit C N, si in hoc casu quæramus translationem quadratorum M V, N C, ad basim, ea non comparabimus productis sub I R, in R V, ut supra: quia jam ex theoremate generali suppositum est omnia quadrata M V, N C, æquari productis sub V G, in G N, cum C N, maxima applicatarum possit & debeat considerari ut basis respectu curvæ, cujus vertex I Quadrata igitur M N, N C, in curva quarum applicatæ decrescunt versus basim, comparabuntur in hoc casu productis G V, in G N, hoc est, ut ad terminos analyticos æquatio in hac figura perveniat, si M I, vel R V, vocetur A, & ipsa M V, sive R I, vocetur E, ipsaque C D, sive G R, quæ ductæ per terminum maximæ applicatarum, ipsi diametro parallelæ, est æqualis: ideoque facilè ex nostris methodis invenienda; rectæ datæ Z, æqualis supponatur, fiet productum ex G V, in G N, æquale producto ex Z, in E, − A in E: ideoque omnia quadrata M V, N C, usque ad maximam applicatam comparabuntur productis Z, in E − A in E, ad basim I D, applicandis. Reliqua verò quadrata C N, B O, P T, comparabuntur productis ex Y F, in F N, quæ in terminis analyticis æquivalebunt A in E, − Z in E. Quibus ita stabilitis facillimè ex priore curva nova versus basim derivabitur; idemque in aliis omnino applicatarum potestatibus erit observandum.

Ut autem pateat novas ex nostra hac methodo emergere quadraturas, de quibus nondum recentiorum quisquam est aliquid subodoratus.

Proponatur præcedens curva, cujus æquatio $\frac{\text{B, quad. cub. in A} - \text{B, cub. cub}}{\text{A cub.}}$ æquale E, cubo.

Dantur omnes E, cubi in rectilineis, ut jam probatum est. Quibus ad basim translatis, fiet ex superiori methodo $\frac{\text{B, qu. in V}}{\text{E. qu.}}$, æquale A, & omnibus secundum artem novo ipsius A, valore accommodatis, evadet tandem nova æquatio quæ dabit curvam ex parte basis, cujus æquatio dabit E, cub. + V, cub. æquale B in E, in V, quæ est curva Schotenii, cujus constructionem tradit in sectione 25. miscellanearum, pag. 493. Figura itaque curva A K O G D C H, quæ apud illum authorem delineatur ex superioribus præceptis quadrationem suam commodè nanciscetur.

Notandum autem de curvis in quibus aggregatum potestatum applicatarum datur, formari non solum curvas ad basim quadrationi obnoxias, sed etiam alias curvas ad diametrum facilè quadrandas. Si enim in 4. figura supponatur æquatio curvæ constitutiva, ut superiùs diximus B, quad. − A, qu. æquale E, quad. non solum ex ea derivabitur nova curva ad basim, cujus æquatio est B, qu. in E, qu. − E qu. quad. æquale B, qu. in V, quad. Sed etiam nova curva ad diametrum æquando potestatem applicatæ quæ est E, qu. producto B, in V. Dabuntur enim omnia producta B, in V, ad diametrum applicata. Et omnibus per B, divisis, dabuntur omnes V, diametro applicatæ; ideoque quadraturæ curvæ novæ ex priori versùs diametrum oriundæ, cujus æquatio erit B, qu. − A qu. æquale B in V. Unde statim apparet novam illam curvam versùs diametrum esse parabolen. Hujusmodi autem transmutationum beneficio non solum ex prioribus curvis oriuntur nouæ; sed itur nullo negotio a parabolis ad hyperbolas, & ab hyperbolis ad parabolas, ut experientiâ constabit.

Sicut autem à curvis in quibus dantur potestates applicatarum, fit præcedentis ope analyseos translatio ad curvas, in quibus latera applicatarum in rectilineis dantur; Ita de curvis in quibus dantur latera applicatarum, devenitur facilè ad curvas, in quibus potestates applicatarum dantur. Cujus rei exemplum esto curva, cujus æquatio B, qui

in E, qu. — E, qu. qu. æquale B, qu. in V, qu. in hac enim æquatione, ut jam probatum eſt, dantur omnes V, Ponatur V, æqualis eſſe $\frac{\text{A, in E}}{\text{B}}$, & ſubrogando in locum ipſius V, novum ipſi aſſignatum valorem, $\frac{\text{A in E}}{\text{B}}$, fiet B, qu. in E, qu. — E, quad. quad. æquale A qu. in E, qu. & omnibus ab E, qu. diviſis, remanebit B, qu. — E, qu. æquale A, qu. ſive B, qu. — A, qu. æquale E, qu. Dabuntur igitur in hac novâ curvâ, quam apparet eſſe circulum, omnia E, quadrata.

Quod ſi ex primâ curvâ in quâ dantur latera applicatarum, quæratur nova in quâ dentur cubi applicatarum, eadem methodo utendum, modò poteſtates ignotarum conditionarias uſurpemus. Proponatur enim curva quam ſuperiùs ex alia deduximus, & ſit illius æquatio B, qu. cub. in V, quad. in E, qu. — E, cub. cub. cub. æquale B, cub. cub. in V, cub.

Probatum eſt in illa dari aggregatum omnium V, hoc eſt latera applicatarum.

Ut itaque ex eâ nova curva derivetur in qua omnes cubi applicatarum dentur, ponatur V, æquari $\frac{\text{E, qu. in A,}}{\text{B qu.}}$ & in locum V, ſubſtituatur novus iſte quem ipſi aſſignavimus valor, fiet tandem operando ſecundùm præcepta artis, æquatio in B, in A, qu. — A cub. & E, cub. quæ dabit curvam in qua omnes E, cub. cubos applicatarum repræſentantes dabuntur.

Ex hac autem methodo non ſolùm dantur & inveniuntur quadrationes infinitæ, nondum Geometris cognitæ, ſed multæ etiam pariter infinitæ deteguntur curvæ, quarum quadraturæ ſupponendo ſimpliciores quadraturas, ut circuli, ut hyperbolæ, ut aliarum expediuntur. Exempli gratiâ, in æquatione circuli, in qua B, qu. — A, qu. æquatur E, qu. dantur quidem in rectilineis omnes applicatarum poteſtates, quarum exponentes ſignantur numero pari, ut omnia quadrata, omnia quadrato quadrata, omnes cubo cubi, &c. Sed poteſtates applicatarum, quarum exponentes ſignantur numero impari, ut omnes E, cubi, omnes E, quad. cubi, dantur tantùm in rectilineis ſupponendo ipſam circuli quadraturam, quod non eſt operoſum demonſtrare, & in praxim redigere, tam quam corollarium methodi precedentes.

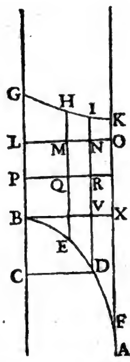
Plerumque autem uſuvenit ut iterandæ, vel bis, vel etiam ſæpius ſint operationes ad inquirendam curæ propoſitæ dimenſionem.

Proponatur, exempli gratiâ, curva, ejus æquatio ſequens ſpeciem determinet B, cub. æqualis A, quad. in E, + B, qua in E.

Si dantur omnes E, ergo dantur omnia ſub rectâ datâ, (B, videlicet) in E, rectangula Rectangulum B, in E, invertendo ſuperiorem, de qua egimus in principio diſſertationis methodum, æquetur quadrato O, qu. Ergo $\frac{\text{O, quad.}}{\text{B}}$ æquabitur E. Et ſubſtituendo in locum E, novum hunc ipſi aſſignatum valorem, fiet B, qu. qu. æquale A, Qu. in O, qu. + B, qu. in O, qu. Et hæc ſit prima operatio, quæ eſt inverſa ejus quam initio hujus diſſertationis præmiſimus, & quæ novam curvam exprimit, in quâ inquirendum reſtat an dentur omnia O, quad. Recurrendum igitur ad ſecundam methodum, cujus beneficio ex quadratis applicatarum latera novæ curvæ inquirimus.

Ponatur $\frac{\text{B, in V}}{\text{O}}$, ex ſuperiore quam ſecundo loco exhibuimus methodo æquari A, & ſubſtituendo in locum A, ipſi jam aſſignatum ex noſtra methodo valorem fiet B, q, qu — B, qu. in O, qu. æquale B, qu. in V, quad. Et omnibus per B, quad. diviſis evadet tandem B, qu. — O, qu. æquale A, quàd. quæ æquatio dat circulum. Et in eâ omnes V, dantur, ſupponendo quadraturam circuli. Recurrendo igitur ad priorem curvam, in quâ B, cub. ponitur æquari A, qu. in E, + B, qu. in E, patet ſpatiũm ab ea curva oriundum per quadraturam circuli poſſe quadrari, id quæ per duas curvas à priore diverſas analyſis noſtra breviter & facilè expedivit.

Hæc verò omnia, & ad inventionem rectarum curvis æqualium, & ad pleraque alia non satis hactenus indagata problemata inservire statim experiendo ἀγχίνως analystà deprehendet.



Sit in sextâ figura parabole primaria A, B, C, cujus axis C B, applicata C D, æqualis axi C B, & recto lateri B V, fiantque B P, P L, L G, singulæ æquales axi C B, & ipsi sic directum sumatur in curva quodvis punctum, ut F, & datis infinitis B X, P S, L O, ipsi C D, parallelis, ducatur F X S O K, parallela axi occurrens rectis P S, L O, in punctis S, & O, & fiat ut summa rectarum F X, X S, sivè ut tota F S, ad S O, ita S O, ad O K. Et sumptis similiter punctis D E, fiat ut D R, ad R N, ita R N, ad N I, & ut E Q, ad Q M, ita Q M, ad M H. Et intelligatur curva infinita per puncta G H I K, &c. incedens, cujus asymptotos erit recta infinita L O. Curva hæc G H I K est ea cujus species à superiori æquatione determinatur, in qua B, cub. æquatur A, qu. in E, + B, quad. in E, Aio itaque ex jam traditâ operationum analytica iteratione, spatium K I H G L M N O, in infinitum versùs puncta K O, extendendum, æquale esse circulo, cujus diameter est axis B C, Hanc verò quæstionem ab erudito Geometra nobis propositam, ita statim expedivimus.

Eâdem methodo spatium à Dioclæa comprehensum quadravimus, vel ad circuli quadraturam reduximus.

Sed elegans inprimis operationum iteratio evadit, cum ab altioribus applicatarum potestatibus, ad depressiores, vel contra à depressioribus ad altiores analysis ipsa transcurrit; cui methodo præsertim debeatur inquisitio summæ applicatarum in quacumque curva proposita, & multa alia problemata tetragonismica. Proponatur, verbi gratiâ, curva, cujus æquatio B, qu. — A, qu. æquale E, qu. quam statim apparet esse circulum. Quæritur summa cuborum applicatarum, hoc est summa E, cuborum. Si dantur omnes E, cubi. Ergo per præcedentes, secundùm potestatis conditionem, methodos, ex ea curva potest alia ad basim derivari, in quâ dabitur summa applicatarum. Ponatur igitur ex methodo $\frac{B,\ qu.\ in\ O}{E,\ qu.}$, æquari A. Ergo substituendo in locum A, jam assignatum ipsi valorem, fiet ex methodo B, qu. in E, qu. qu. — E, cub.

cub. æquale B, qu. qu. in O, qu. quæ est æquatio curvæ, in qua omnes O, dantur ex ſuppoſitione quam fecimus in primâ curvâ, dari omnes E, cubos. Cum igitur in hac nova curva omnes O, dentur, ex ea derivetur tertia, in qua quærantur quadrata applicatarum, non verò cubi, ut in priore curvâ jam ſuppoſitum eſt. Fingatur igitur ex noſtra quæ in quadratis, ut jam ſupra diximus, uſurpatur methodo $\frac{\text{E, in V}}{\text{B}}$, æquari O. Ergo B, qu. in E, qu. qu. – E, cub. cub. æquabitur B, qu. in E, qu. in V, quad. Et omnibus abs E, qu. diviſis fiet B, qu. in E, q. – E, qu. qu. æquale B, qu. in V, quad. Et in hac curva omnes E, quadrati dantur. Si igitur ex hac curva quæramus aliam in qua omnes applicatæ dentur, ponatur, ſi placet, E, quad. æquale B, in Y. Ergo in ultima hac æquatione B, in Y – Y quad. æquabitur V, qu. Et cùm in ſuperiore dentur omnes E, qu. dabuntur in iſta omnia rectangula B, in Y, ideoque omnes Y. Cum ergo omnes Y, dentur in hac ultima curva, quæ eſt circulus ut patet. Igitur eâ tantùm conditione dantur, ſi ſupponas dari circuli quadraturam. Regrediendo igitur ab hac ultimâ, in qua deſinit noſtra analyſis, curva, ad priorem, patet omnes applicatarum ad circulum cubos dari, ſupponendo circuli quadraturam. Idem de quadratocubis, de quadratoquadratocubis, & cæteris in infinitum gradus imparis poteſtatibus demonſtrare eſt in promptu. Sed multiplicatur numerus curvarum, prout altior eſt, de quâ inquirimus, poteſtas. Nec eſt difficilis ab analyſi ad ſyntheſim, & ad verum quadrandæ figuræ calculum regreſſus.

Sæpiùs autem contingit, & miraculi inſtar eſt per plurimas numero curvas incedendum & expatiandum eſſe analyſtæ, ut ad ſimplicem æquationis localis propoſitæ dimenſionem perveniatur.

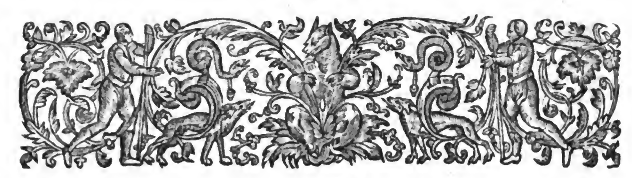
Proponatur, exempli causâ $\frac{B^7 \text{ in } A - B^8}{A^6}$ æquari E, qu.

Cùm ſupponatur dari quadratura figuræ ex hac æquatione oriundæ; dabuntur omnes A. Ergo omnes B, in A, quæ ſi æques quadrato ignoto O, qu. dabuntur omnes O, qu. & A, æquabitur $\frac{\text{O q}}{\text{B}}$ ideoque fiet æqu. inter $\frac{B^{12} \text{ in O qu.} - B^{14}}{O^{12}}$ & E, q. ex hac novâ curvâ, aliâ methodo, de quâ toties egimus, deducetur tertia, in quâ quia dantur omnes O, quadrati, ponatur $\frac{\text{B in V,}}{\text{O}}$ æquari E, ergo fiet æquatio inter $\frac{B^{10} \text{ in O q} - B^{12}}{O^{10}}$ Et V, quadr. unde deducetur quarta curva, in qua dabuntur omnes O, ideoque omnes V. Si dantur omnes V. Ergo ex prima methodo dantur omnia ſub B, in V, rectangula. ſit B, in V, æquale Y, quadrato: ideoque $\frac{\text{Y quad.}}{\text{B.}}$ æquabitur V, fiet æquatio inter $\frac{B^{12} \text{ in O qu.} - B^{14}}{O^{10}}$ & Y^4 unde orietur quinta curva in quâ dabuntur omnes Y, quadr. Ex illo ſolita methodo deducatur alia curva, & fiat $\frac{\text{B in I,}}{\text{Y}}$ æqualis O.

Omnibus ſecundùm præcepta analyſeos peractis fiet B^4 in Y^4 in I, quad. – B^4 in Y^6 æquale I^{10} unde orietur ſexta curva, in quâ dabuntur omnes I, ideoque omnes I. Ex eâ contrariâ quam jam ſæpius inculcavimus methodo quæratur alia curva in qua dentur quadrata applicatarum, & ſit $\frac{\text{I in A,}}{\text{B}}$ æqualis Y, (nihil enim vetat defectu vocalium, ad priores ſupra uſurpatas recurrere,) fiet B, qu. in $A^4 - A^6$ æquale

le B, qu. in I^4, unde orietur curva ſeptima, in qua omnia I, quadrata dabuntur. Reducantur ad latera, notâ & ſæpius iteratâ ſuperiùs methodo, & fiat I, quadratum æquale B, in E. Ergò omnia B, in E, dabuntur Et inde deducetur octava curva, in qua B qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B^4 in E qu. in eâque dabuntur omnes E; ideoque omnes A. Ex ea deducatur alia curva, in qua dentur quadrata applicatarum, & ex methodo ponatur $\frac{A \text{ in } O}{B}$, æquari E. Ergo B. qu. in $A^4 - A^6$ æquabitur B, qu. in A qu. in O qu. Et omnibus abs A qu. diviſis, fiet æquatio inter B qu. in A q. $-A^4$. Et B q. in O q. in qua omnia A, qu. dabuntur, Et erit nona curva ab ea æquatione determinata. Cum igitur in eâ omnia A quadrata dentur, deducatur ex eâ alia tandem curva, in qua dentur latera, & ſit A qu. æquale B in V, fiet B in $V - V$ quad. æquale O, qu. quæ ultima æqualitas dabit decimam curvam, in qua omnes V dabuntur. At hæc ultima curva, eſt circulus, ut patet, & in ea omnes V, non dantur, niſi ſuppoſitâ circuli quadraturâ. Ergo recurrendo ad primam curuæ propoſitæ conſtitutionem, dabitur illius quadratura, ſupponendo ipſam ultimæ iſtius curvæ, ſive circuli quadraturam. Beneficio igitur decem curvarum inter ſe diverſarum ad notitiam prioris pervenimus.





NOVVS SECVNDARVM
ET VLTERIORIS ORDINIS RADICVM
IN ANALYTICIS USUS.

REDUCTIO secundarum, & ulterioris ordinis radicum, ad primas, quæ maximi est in Algebricis momenti, unicam pro fundamento agnoscit duplicatæ æqualitatis analogiam, eamque, quoties opus fuerit, iterandam progressus ipse quæstionis ostendit.

Proponatur A, cubus + E, cubo æquari Z, solido. Item B, in A, + E q. + D, in E, æquari N, quad. ut secunda radix devolvatur ad primam. Hæc sunto præcepta.

Quæcumque à secunda radice adficientur homogenea in unam æquationis partem transeunto, ut in superiori exemplo, cum A c. + E c. æquetur Z, sol. Ergò Z, S. —A c. æquabitur E c.

Similiter cum B in A, + E q. + D, in E, æquetur N q. Ergo N q. — B, in A, æquabitur E q. + D, in E.

In utraque igitur æquatione homogenea ab E, sive ab secunda radice adfecta, unam æquationis partem constituunt.

Si igitur duplicata ejusmodi æqualitas ad analogiam revocetur, erit ut

Z, S, — A c. ad E c.

Ita N q. — B, in A, ad E q. + D, in E.

Cum itaque factum sub extremis comparabitur facto sub mediis, tanquam ipsi æquale, omnia homogenea divisionem admittent per E, sive per secundam radicem, ut patet: quia secundus & quartus terminus ab E, adficiuntur.

Erit nempe + Z S, in E q, — A c, in E q, + Z S, in D in E, — A c, in D in E, æquale N q, in E c, — B in A, in E c.

Omnia dividantur toties per E, donec aliquod ex homogeneis adfectione sub E, omnino liberetur.

Erit Z S, in E, — A c, in E, + Z S, in D, — A c, in D.
æquale N q, in E q, — B in A, in E q.

Quo peracto, nova hæc æquatio, uno ad minus gradu depressior erit (quoad secundam radicem) quàm elatior ex duabus primùm propositis.

Patet nempe elatiorem ex duabus primùm propositis affici sub cubo E, Istius verò nullam abs E, adfectionem excedere E q.

Nec tamen sic quiescendum, sed iteranda duplicatæ æqualitatis analogia, donec adfectio secundæ radicis fiat tantùm sub latere, ut asymmetria omnis evanescat.

Præparetur itaque ultima hæc æquatio juxta modum præscriptum, & homogenea sub E, quomodocumque affecta unam æquationis partem faciant.

Erit itaque Z S, in D – Ac in D, æquale N q, in E q, – B, in A, in E q, – Z S, in E + A c, in E.

Sed ex duabus primùm propositis, quæ depressior est, exhibet æquationem sequentem ut diximus.

N q, – B, in A.
æquale E q, + D, in E.

Revocetur rursùm ad analogiam duplicata ista æqualitas.

Erit itaque
Z S, in D, – A c, in D, ad
N q, in E q, – B, in A, in E q, – Z S, in E + A c, in E.
ut N q, – B, in A, ad
E q, + D, in E.

Cum itaque factum sub extremis æquabitur facto sub mediis, tamquam ipsi æquale, omnia homogenea poterunt dividi per E, ut supra demonstratum est. Erit nempe
Z S, in D, in E q, + Z S, in D q, in E, – A c, in D, in E q, – A c, in D q, in E.
æquale
N qq, in E q, – N q, – in B, in A, in E q, – N q, in Z S, in E + N q, in A c, in E, – B, in A, in N q, in E q, + B q, in A q, in E q, + B, in Z S, in A, in E, – B, in A q q, in E.

Et omnibus abs E, divisis, fiet tandem Z S, in D, in E, + Z S, in D q, – A c, in D, in E – Ac in D q.
æquale
N qq, in E – N q, in B, in A – in E – N q, in Z S, + N q, in A c. – B, in A, in N q, in E, + B q, in A q, in E, + B, in Z S, in A – B in A qq.

Quo peracto, nova hæc æquatio unius adhuc gradus depressionem (quoad secundam radicem) lucrata est, ut hic patet. Cum enim homogenea sub E, adfecta in unam æquationis partem transierint.

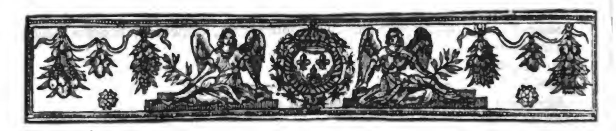
Fiet Z S, in D q, – Ac in D q + N q, in Z S – N q, in Ac – B in Z S, in A + B in A qq.
æquale N qq, in E – N q, in B, in A, in E – B, in A, in N q, in E, + B q, in A q, in E – Z S, in D, in E, + A c, in D, in E.

Neque ùlteriùs progrediendum, cum jam secunda radix sub latere tantùm appareat; ideoque solo applicationis beneficio ipsius E, relatio ad primam radicem manifestabitur. Vt hic,

Z S, in D q, – Ac in D q, + N q, in Z S, – N q, in Ac – B, in Z S, in A + B, in A qq.
―――――――――――――――――――――――――――――――
N qq – N q, in B, in A – N q, in B, in A + B q, in A q, – Z S, in D + A c, in D.
æquabitur E, quò tendendum erat.

Ut igitur duæ primùm propositæ radices in unam transeant, resumatur ex duabus prioribus æquationibus quam volueris: depressior tamen idonea magis, ne altiùs ascendat æquatio.

Cum itaque in una ex æquationibus primùm propositis B, in A + E q + D, in E, æquetur N q, loco ipsius E, subrogetur jam agnitus ejus valor per relationem, vel ad terminos cognitos vel ad priorem radicem, quæ in exemplo proposito est A. Et rursùm sub hac nova specie ordinetur æquatio; manifestum est evanuisse omnino secundam radicem, & in æquationem ab omni asymmetria liberam itum esse, methodumque esse generalem. Si enim plures duobus terminis proponantur incogniti, methodus iterata tertias. Si opus fuerit, radices ad primas & secundas; deinde secundas ad primas, &c. eodem prorsus artificio reducet.



APPENDIX

Ad ſuperiorem methodum.

SUPERIORI methodo debetur perfecta & abſoluta aſymmetriarum in Algebricis expurgatio. Neque enim ſymmetrica climatiſmus Vietæa, quæ unicum hactenus ad aſymmetrias fuit remedium, efficax ſatis & ſufficiens inventa eſt.

Proponatur quippe latus cubicum (B, in A qu. — A cub. + lat. quad. (A q, + 2. in A) + latus quad. quad. D, cub. in A — A, qu. qu.) + latus quad. (G, in A, — A q,) æquari rectæ N.

Qua ratione ab aſymmetriis hujuſmodi extricabit ſe & quæſtionem ſuam Analyſta Vietæus? An non potiùs dum creſcet labor, creſcet difficultas? Et tandem fatigatus & deluſus novum ab analytice lumen expoſcet?

Hoc ſanè luculenter ſuperior methodus ſubminiſtrat: Vnicum exemplum, idque breviſſimum, adjungimus. Recluſo enim ſemel fundamento, cætera apertiſſimè manifeſtantur.

Proponatur lat. cub. (2. in A qu. — A, cub.) — L, cub.(Ac + B q, in A) æquari D.

Ita primum ordinetur æquatio, ut unica ex aſymmetriis unam illius partem faciat.

Fiat nempe D — lat. cub. (Ac + B q, in A) æqualis lat. cub. (2. in A q — A cub.)

Hoc peracto omnes termini aſymmetri à ſecundis & ulterioribus, ſi opus fuerit, radicibus denominentur, excepto eo, quem unicum in unam æquationis partem rejecimus.

Fingatur, verbi gratiâ, lat. cub. (A cub. + B q, in A) eſſe E.

Hac enim viâ ad eam quam injungit ſuperior methodus, duplicatæ æqualitatis analogiam deveniemus.

Erit nempe D — E, æqualis lat. cub. (2. in A q, — Ac,) & omnibus in cubum ductis. D, cubus + D, in E qu. ter — D q, in E, ter — E c. æquabitur 2. in A q — Ac.

Sed ex hypotheſi E, cubus æquatur A, cubò + B, qu. in A.

Ergo oritur duplicata æqualitas, & in utraque (juxta methodum) termini abs ſecunda radice adfecti, in unam æquationis partem ſunt conjiciendi. Erit nempe.

2. in A q — Ac — D c, æqualis D, in E q, ter — D q, in E, ter — Ec.

Item A, cub. + B² in A, æqualis E, cub.

Iteretur toties operatio, donec ſecunda radix ad primam revocetur. Quo peracto, loco ipſius E, novus ipſius valor uſurpetur, & ſub hac nova ſpecie quævis ex prioribus æqualitatibus ordinetur, omnia conſtabunt.

Nec inutilia adjungo, aut moror in ſuperfluis. Quis enim non videt ſingulos terminos aſymmetros poſſe eadem ratione, ſi non ſufficiant ſecundæ radices, tertiis, quartis, &c. in infinitum inſigniri? Quo caſu quartam, ſive ultimam radicem tamquam ſe-

cundam confiderabis. Reliquas verò tantisper, vel pro primis, vel pro terminis cognitis habebis, donec ultima illa omnino evanuerit, five ad primas, fecundas & tertias reducta fuerint. Simili prorfus artificio tertias reduces ad fecundas & primas, ac denique fecundas ad primas, ut jam fæpius inculcavimus.

Nulla eft ergo afymmetria quam non cogat exulare hæc methodus, cujus ufus præfertim eximius, imò & neceffarius innumerofa poteftatum refolutione. Statim enim nempe atque afymmetriæ evanuerint, non deerit Vietæum in arithmeticis quæftionibus artificium: & fi veris explicari numeris quæftio non poffit, proximæ, quantumvis libuerit, fuppetent folutiones. Cum tamen proximas veris folutiones, nullo pacto, quandiu duraverint afymmetriæ, confequi poffis.

Sed & ulteriùs inquirenti obtulit fe mira ad locorum fuperficialium plenam & perfectam notitiam exinde derivanda methodus, quæ & ijs problematis infervit, in quibus dantur ab initio plura quam requirat ipfa problematis conftruendi determinatio.

Quod ut clariùs intelligas, funt quædam problemata quæ unicam tantùm agnofcunt pofitionem ignotam, quæ vocari poffunt determinata, ad differentiam inter ipfa & problemata localia conftituendam. Sunt alia quædam quæ duas pofitiones ignotas habent, & ad unicam tantùm numquam poffunt reduci; ea problemata funt localia. In prioribus illis unicum tantum punctum inquirimus; in iftis lineam. Sed fi problema propofitum tres ignotas pofitiones admittat, problema hujufmodi non jam punctum dumtaxat, aut lineam tantùm, fed integram fuperficiem quæftioni idoneam inveftigat. indeque oriuntur loci ad fuperficiem, &c. in reliquis.

Sicut autem in prioribus data ipfa fufficiunt ad determinationem quæftionis, ita in fecundis unum datum deeft ad determinationem; in tertiis verò duo tantùm data determinationem poffunt complere. At contrà poteft fieri ut quemadmodum in his cafibus data aut fufficiant aut defint: ita in plerifque aliis data ipfa fuperflua fint & abundent. Exemplo res fiet evidens.



In recta A C, datâ, datur rectangulum A B C. Datur etiam differentia quadratorum A B, & B C.

In hoc cafu plura patet offerri data quàm determinatio, ideoque folutio ipfius quæftionis expofcat.

Frequentiffimus tamen horum problematum, in phyficis præfertim & apud artifices eft ufus, eaque omnia per applicationem fimplicem beneficio noftræ methodi expediuntur; neque recurrendum ad extractionem radicum, licèt æquationes ad quafvis poteftates afcendant.

Proponatur, verbi gratiâ in quadam quæftione A, cub. + B, qu. in A, æquari 2, qu. in D.

Item etiam (cum ex hypothefi quæftio fupponatur effe abundans: has enim quæftiones abundantes, ficut locales deficientes appellare confuevimus) G, fol. in A − A q q, æquari B, qu. in N, pl. Duplicata hæc æqualitas ad analogiam revocetur, & ex præfcripta methodo confideretur unica noftra radix ignota, quæ in hoc exemplo eft A, ficut in præcedentibus fecundam, aut ulterioris ordinis radicem confideravimus, & toties juxta methodum iteretur operatio, donec adfectio fub A, per fimplicem applicationem poffit expediri, five non tam ad primas radices, quàm ad terminos omnino notos reduci. Patebit folutio problematis fimpliciffima, nec analyftam deinceps æquationes quadraticæ, &c. remorabuntur.

Lubet & coronidis loco, famofi illius problematis:

Datis ellipfi & puncto extra ipfius planum, fuperficiem conicam, cujus vertex fit punctum datum, & bafis ellipfis data, ita plano fecare, ut fectio fit circulus.

Solutionem quæ huic methodo debetur, indicare, eamque ſimpliciſſimam.

Eò deducunt quæſtionem Geometræ, ut ſumptis quinque punctis ad libitum in ellipſi, & junctis rectis à vertice conicæ ſuperficiei ad puncta illa per junctas quinque rectas circulum deſcribant. Inveniuntque problema hoc pacto eſſe ſolidum. Sed cum puncta in ellipſi ſint infinita, ſi loco quinque punctorum ſumantur ſex, fiet problema abundans, & orietur neceſſariò duplicata æqualitas, quæ tandem ignotam quantitatem per ſimplicem applicationem patefaciet.

Eadem ratione ſi detur quæcumque linea curva in plano, aut etiam ſuperficies localis, cujuſcumque tandem gradus ſint, invenientur diametri & axes figurarum; imo & in ſuperficie locali exhibebuntur omnes omnino curvæ loci ſuperficialis conſtitutivæ, &c.

Exponatur, verbi gratiâ, ſuperficies conica, cujus vertex ſit punctum datum, baſis verò, parabole aut ellipſis cubica, aut quadratoquadratica, aut ulterioris in infinitum gradus.

Poteſt hujuſmodi ſuperficies conica, beneficio iſtius methodi ita ſecari, ut in ea exhibeatur quælibet curva, quæ ex conſtitutione figuræ in ea ſuperficie poteſt deſcribi, & problematis ſolutio ſemper evadet ſimpliciſſima.

Nihil addimus de tangentibus curvarum, & pleriſque aliis hujus methodi uſibus: fient quippe obvii, nec ſedulam indagatoris analytici meditationem effugient.





METHODUS

Ad disquirendam maximam & minimam.



MNIS de inventione maximæ & minimæ doctrina, duabus positionibus ignotis innititur, & hac unica præceptione; statuatur quilibet quæstionis terminus esse A, sive planum, sive solidum, aut longitudo; prout proposito satisfieri par est, & inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu ut libet inuolutis; Ponatur rursus idem qui prius esse terminus A, + E, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A & E, gradibus ut libet coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia & demptis communibus (quo peracto homogenea omnia ex parte alterutra ab E, vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E, vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione sub E, omnino liberetur.

Elidantur deinde utrimque homogenea sub E, aut ipsius gradibus quomodolibet involuta & reliqua æquentur. Aut si ex unâ parte nihil superest æquentur sane, quod eodem recidit, negata adfirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A, quâ cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subijcimus

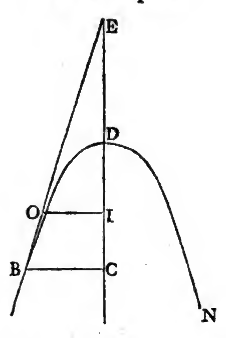
Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang A E C, sit maximum; Recta A C, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, esse A, ergo reliqua erit B — A, & rectang. sub segmentis erit B, in A — A^{2} quod debet inueniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B, esse A, + E, ergò reliqua erit B — A — E, & rectang. sub segmentis erit B, in A, — A^{2} + B, in E, ^{2}E in A, — E, quod debet adæquari superiori rectang. B, in A, — A^{2}, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in $E^{\prime\prime}$ + E^{2}, & omnibus per E, divisis B, adæquabitur ^{2}A + E, elidatur E, B, æquabitur ^{2}A, igitur B, bifariam est dividenda, ad solutionem propositi, nec potest generalior dari methodus.

De Tangentibus linearum curvarum.

AD superiorem methodum inventionem Tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus.

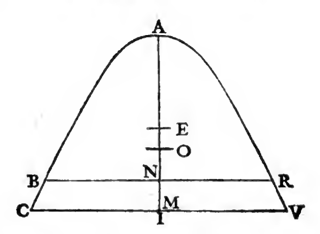


Sit data, verbi gratià, Parabole B D N, cujus vertex D, diameter D C, & punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta B E, tangens parabolen, & in puncto E, cum diametro concurrens, ergo sumendo quodlibet punctum O I, in recta B E, & ab eo ducendo ordinatam O I, à puncto autem B, ordinatam B C major erit proportio C D, ad D I, quàm quadrati B C, ad quadratum O I, quia punctum O, est extra parabolen, sed propter similitudinem triangulorum, ut B C, quad. ad O I, quad. ita C E, quad. ad I E, quad. Major igitur erit proportio C D ad D I, quàm quadrati C E ad quad. I E, Cum autem punctum B detur, datur applicata B C, ergo punctum C datur etiam C D, Sit igitur C D, æqualis D, datæ. Ponatur C E, esse A, ponatur C I esse E, ergo D, aut D − E habebit majorem rationem, quàm A^2 ad $A^2 + E^2 - A$, in E. Et ducendo inter se medias & extremas D in A^2 + D in E^2 − D in A in E, majus erit quàm D, in A^2 − A^2 in E, Adæquentur igitur juxta superiorem methodum, demptis itaque communibus D, in E^2 − D, in A in E adæquabitur − A^2 in E, aut quod idem est, D in E^2, + A^2 in E, adæquabitur D in A in E, Omnia dividantur per E, ergo D in E + A^2 adæquabitur D in A, elidatur D in E, ergo A^2 æquabitur D in A^2, ideoque A æquabitur D, ergo C E, probavimus duplam ipsius C D, quod quidem ita se habet.

Nec unquam fallit methodus, imò ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest extendi, ejus enim beneficio centra gravitatis in figuris lineis curvis & rectis comprehensis, & in solidis invenimus, & multa alia, de quibus fortasse aliàs, si otium suppetat. De quadraturis spatiorum sub lineis curvis & rectis contentorum, imò & de proportione solidorum ab eis ortorum ad conos ejusdem basis & altitudinis, fusè cum Domino de Roberval egimus.

Centrum

Centrum gravitatis, parabolici conoidis, ex eadem methodo.



ESTO parabolicus Conois C B A V, cujus axis I A, basis, circulus circa diametrum C I V, quæritur centrum gravitatis perpetuâ & constanti, quâ maximam, & minimam & tangentes linearum curvarum investigavimus methodo, ut novis exemplis & novo usu, eoque illustri, pateat falli eos qui fallere methodum existimant.

Ut possit parari analysis, axis I A, dicatur B, ponatur centrum gravitatis esse O, & rectam A O, ignotam, dici A, secetur axis I A, quovis plano ut B N, & ponatur I N, esse E, ergò N A, erit B -- E, constat in hac figura & similibus (parabolis aut parabolicis) centra gravitatum in portionibus abscissis, per parallelas basi in eadem proportione dividere axes (quod in parabola ab Archimede demonstratum porrigitur, non dissimili ratiocinio ad parabolas omnes, & parabolicos conoides, ut patet) ergo centrum gravitatis portionis cujus axis N A, basis semidiameter B N, ita dividet A N, in puncto, verbi gratia, E, ut ratio N A, ad A E, sit eadem rationi I A, ad A O, erit igitur in notis ut B, ad A, ita B — E, ad portionem axis A E, quæ idcirco æquabitur $\frac{B \text{ in } A - A \text{ in } E}{B}$, & ipsa O E, quæ est intervallum inter duo centra gravitatis æquabitur $\frac{A \text{ in } E}{B}$, ponatur portionis reliquæ C B R V, centrum gravitatis esse M, quod necessariò debet esse inter puncta N, & intra figuram per pet. 9. Archimed. de æquipond. cum figura C B R V, sit in easdem partes cavas, sed ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita est E O, ad O M, cum O, sit centrum gravitatis totius figuræ C A V, & puncta E, & M, sint centra gravitatis partium, Portio autem C A V, ad portionem B A R, est in nostro conoide Archimedæo ut quadratum I A, ad quadratum N A, hoc est in notis ut b^2 ad $B^2 + E^2 - B$ in E^2, ergo dividendo portio C B R V, est ad portionem B A R, ut B in E^2 -- E^2 B in E^2, demonstrauimus autem ut portio C B R V, ad portionem B A R, ita esse O E, ad O M, erit igitur in notis ut B in E^2 — ad $B^2 + E^2 + E^2$ E B, in E^2 ita O E, sive $\frac{A \text{ in } E}{B}$, ad O M, quæ proinde applicabitur $\frac{B^2 \text{ in } A \text{ in } E^2 + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A, \text{ in } {}^2E^2}{B^2 \text{ in } E^2 - B \text{ in } {}^2B}$

. Cum autem punctum M, ex demonstratis, sit inter puncta N, & I, ergo recta

I

O M, erit minor rectâ OI recta autem O I, in notis est B − A, deducta est igitur quæstio ad methodum, & adæquanda B − A cum $\frac{B^2 \text{ in } A, \text{ in } E, + A \text{ in } E^3 - B \text{ in } A \text{ in } {}^2E^2}{B^2 \text{ in } E^2 - B \text{ in } E^3}$.

Et omnibus ductis in denominatorem & abs E divisis adæquabuntur ${}^2B^3 - B^2$ in ${}^2A - B^2$ in $E - B$ in A in E, & B^2 in $A + E^3 - B$ in A in ${}^2E$, quandoquidem nihil est utrimque commune elidantur homogenea omnia ab E, adfecta, & æquentur reliqua, fiet ${}^2B^3 - B^2$ in ${}^2A$ æqualis B^2 in A, ideoque ${}^3A$ æquabitur ${}^2B$. Erit igitur I A, ad A O, ut 3. ad 2. & A O, ad O I, ut 2, ad 1, quod erat inveniendum. Non dissimili methodo in quibuslibet parabolis in infinitum, & parabolicis conoidibus inveniuntur centra gravitatum.

Quemadmodum autem, verbi gratia, in nostro conoide parabolico circa applicatam axi converso indaganda sint centra gravitatis, non vacat in præsens judicare, sufficit aperuisse me in hoc nostro conoide centrum gravitatis dividere axem in portiones quæ servant proportionem 11. ad. 51.

Ad eamdem methodum.



VOLO mea methodo secare lineam A C datam ad punctum B, ita ut solidum contentum sub quadrato A B, & linea B C sit maximum omnium solidorum eodem modo descriptorum secando lineam A C, in quovis alio puncto.

Ponamus in notis Algebricis lineam A C, vocari B, & lineam A B, incognitam A, B C, erit B − A; oportet igitur solidum A^2 in $B - A$, satisfacere quæstioni.

Sumamus iterum loco A, A + E, solidum quod fiet ex quad. A + E, & ex B E A, erit B in A^2, + B in E^2 + B in A in ${}^2E - A^3 - A$ in ${}^3E^2 - A^2$ in ${}^3E$.

Id comparo primò solido A^2 in $B - A^3$, tamquam essent æqualia, licèt reverà æqualia non sint, & hujusmodi comparationem vocavi adæqualitatem, ut loquitur Diophantus, sic enim interpretari possum græcam vocem παρισότης qua ille utitur, deinde è duobus solidis demo quod iis est commune scilicet B^2, in $A - A^3$, quo peracto nihil ex unâ parte superest, & superest ex alia B in E^2 + B in A in ${}^2E - A^2$ in ${}^3E^2 - A^2$ in ${}^3E - E^3$, Comparanda sunt ergo homogenea notata signo + cum ijs quæ notantur signo −, & iterare comparationem adæqualitatem oportet inter B in E + B, in A, in ${}^2E$, ex unâ parte, & A, in ${}^3E^2 + A^2$ in ${}^3E + E^3$ ex altera totum dividamus per E. Comparatio adæqualitas, erit inter B, in E + B, in ${}^2A$, & A, in ${}^3E + {}^3A^2 + E^2$.

Hac divisione peracta si omnia homogenea dividi possunt per E, iteranda erit divisio per E, donec reperiatur aliquod ex homogeneis quod hujusmodi divisionem non admittat, id est, ut Vietæis verbis utar, quod non afficiatur ab E, sed quia in exemplo proposito comperimus divisionem iterari non posse, hîc standum est. Deinde utrimque deleo homogenea, quæ afficiuntur ab E, superest ex unâ parte B, in ${}^2A$, & ex alia ${}^3A^2$, inter quæ non amplius facere opoltet æquationes, ut antea, comparationes fictas & adæqualitates, sed veram æquationem. Dividamus totum per A, ergo ${}^2B$, erit æquale ${}^3A$, & B, erit ad A, ut 3 ad 2. Redeamus ad nostram quæstionem, & dividamus A C, in puncto B, ita ut A C, sit ad A B, ut 3 ad 2 dico solidum quadrati A B, in B C, esse maximum omnium quæ describi possunt in eadem linea C, in qualibet alia sectione.

Ut pateat hujus methodi certitudo, desumam exemplum è libro Apollonij de determinata sectione, qui ut reffert Pappus initio septimi libri, difficiles determinationes habebat, & eam quæ sequitur difficillimam esse existimo, quam ut ut inventam supponit Pappus septimo libro, nec enim illam veram esse demonstrat, sed ut veram supponens, alias inde consequentias deducit. Hoc loco Pappus vocat minimam proportionem μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον minimam & singularem, ideò scilicèt, quia si proponatur quæstio circa magnitudines datas duobus semper locis satisfit quæstioni; sed in minimo aut maximo termino unicus est qui satisfaciat locus, idcirco Pappus vocat minimam & singularem, id est unicam quæstionem omnium quæ proponi possunt minimam. Commandinus hoc loco dubitat, quid per μοναχὸν intelligat Pappus, & veritatem quam modo explicui ignoravit; sed ecce propositionem. Sit recta data OMID, & in ea quatuor puncta OMID,



data, dividenda est portio M I, in puncto N, Ita ut rectanguli O N D, sit ad rectangulum M N I, proportio minor, quàm proportio cujuslibet rectanguli paris O N D, ad quodvis aliud par M N I, supponamus in notis lineam O M, datam vocari B, lineam D M, datam Z, & M I, datam G, fingamus nunc M N, quod quærimus vocari A, ergo rectangulum OND, in notis B, in Z − B, in A + Z, in A − A^2 & rectangulum M N I, erit G, in A − A^2, oportet igitur proportionem B, in Z − B + Z, in A − A^2 ad G, in A − A^2 esse minimam omnium quæ fieri possunt qualibet alia divisione lineæ M I, sumamus iterùm loco A, A + E, & habebimus proportionem B, in Z − B, in A − B, in E + Z, in A + Z in E − A^2 − E^2 − A, in ${}^2E$, ad G, in A + G, in E − A^2 − E^2 − A, in ${}^2E$, quam primæ comparare per adæqualitatem oportebit, id est multiplicare primum terminum per quartum ex una parte, & secundum per tertium ex alia, & simul hæc duo producta comparare, productum B, in Z − B, in A + Z, in A − A^2 qui prior est terminus per G, in A, + G, in E − A^2 − E^2 − A, in ${}^2E$, qui est ultimus terminus, facit B, in Z, in G, in A − G, in B, in A^2 + G, in Z, in A^2 − G, in A^3 + B in Z in G in E − B in A in G in E + Z in A in G in E − A^2 in G in E − B in Z in A^2 + B in A^3 − Z in A^3 + A^4 − B in Z, in E^2 + B in A in E^2 − Z in A in E^2 + A^2 in E^2 − B in Z in A in ${}^2E$ + B in A^2 in ${}^2E$ − Z in A^2 in ${}^2E$ − Z in A^2 in ${}^2E$ + A^3 in ${}^2E$.

Productum autem G in A − A^2 secundi termini per B in Z − B in A − B in E + Z in A + Z in E − A^2 − E^2 − A in ${}^2E$ tertium terminum facit B in Z in G in A − G in B in A^2 − G in B in A in E + G in Z in A^2 + G in Z in A in E − G in A^3 − G in A in E^2 − G in A^2 in ${}^2E$ − B in Z in A^2 + B in A^3 + B in A^2 in E − Z in A^3 − Z in A^2 in E + A^4 + A^2 in E^2 + A^3 in ${}^2E$.

Comparo hæc duo producta per adæqualitatem, demamus quod ipsis commune est & residuum dividamus per E, supererit ex una parte B in Z in G − A^2 in G − B in Z in E + B in A in E − Z in A in E − B in Z in ${}^2A$ − Z in ${}^2A^2$ − B in ${}^2A^2$, & ex alia G in A in E − G in ${}^2A^2$ + B in A^2 − Z in A^2.

Deleamus omnia homogenea inter quæ iterum reperitur E, supererit,

B in Z in G − A^2 in G − B in Z in ${}^2A$ − Z in ${}^2A^2$ + B in ${}^2A^2$ æquale.

− G in ${}^2A^2$ + B in A^2 − Z in A^2.

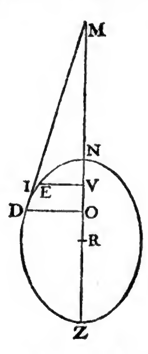
Et transponendo.

− B in A^2 + Z in A^2 − G in A^2 + B in Z in ${}^2A$ erit æquale B in Z in G.

Istius æquationis resolutione reperiemus valorem lineæ A, id est valorem M N, & consequenter punct. N & inveniemus veritatem propositionis Pappi qui docet ad reperiendum punctum N, oportere facere ut rectangulum O N D ad rectangulum O I D, ita quadratum M N ad quadratum N I, æquationis enim resolutio nos ad eamdem constructionem deducit.

Ut tandem tangentibus applicetur hæc methodus sic procedere possum.

Sit, verbi gratiâ, Ellipsis Z D N, cujus axis sit Z N, & centrum R, sumamus punctum ut D, in ejus circumferentia à quo ducamus lineam D M quæ tangat Ellipsim, ducamus præterea applicatam D O, & supponamus notis Algebricis O Z datam vocari B & O N datam vocari G, fingamus O M quam quærimus incognitam vocari A, intel-



ligimus autem per O M portionem Axis contentam inter punctum V sumptum ad libitum, inter punctum O & concursum tangentis.

Quoniam D M tangit Ellipsim si ducamus lineam I E V parallelam D O per punctum V sumptùm ad libitum inter O & N, certum est lineâ I E V secari tangentem D N, & Ellipsim quoque ut in punctis E & I, & quia linea D M tangit Ellipsim omnia puncta præter D erunt extra Ellipsim, ergo linea I V, erit major lineâ E V. Erit igitur major proportio quadrati D O ad quadratum E V quàm quad. D O ad quad. I V, sed ut quad. D O ad quad. E V ita proprietate Ellipsis rectang. Z O N est ad rectang. Z V N, & ut quad. D O ad quad. I V ita quad. O M ad quad. V M, major est igitur proportio rectang. Z O N ad rectang. Z V N quam quad. O M ad quad. V M. Fingamus sumptam ad libitum æqualem E, rectang. Z O N erit B in G, rectang. Z V N erit B in G − B in E + G in E − E^2 quad. O M erit A^2 quad. V M A^2 + E^2 − A in ^2E.

Erit igitur major proportio B in G ad B in G − B in E + G in E − E^2 quam A^2 ad A^2 − E^2 − A in ^2E. Et consequenter si multiplicetur prior terminus per ultimum & secundus per tertium B in G in A^2 + B in G in E^2 − B in G in A in ^2E, productum scilicet prioris termini per ultimum, erit majus B in G in A^2 − B in E in A^2 + G in E in A^2 − A^2 in E^2.

Oportet igitur juxta meam methodum comparare hæc duo producta per adæqualitatem; demamus quod iis commune est & dividamus residuum per E, supererit ex unâ parte,

B in G in E − B in G in ^2A, & ex alia,

− B in A^2 + G in A^2 − A^2 in E Deleamus homog. quæ aliquid habent lineæ E, supererit ex una parte,

− B in ^2A, & ex alia − B in A^2 + G in A^2.

Quos duos terminos juxta methodum æquare oportet & transponendo terminos ut par est, inveniemus B in A − G in A, æquale B in ^2G. Vides hanc resolutionem eam-

dem esse cum Apolloniana, nam meâ constructione ad reperiendam tangentem oportet facere ut B — G ad G ita ²B ad A, id est ut Z O — O N ad O N, ita ²Z O ad O N, sed Apollonianâ oportet facere ut Z O ad O N, ita Z M ad M N. Duæ autem illæ constructiones ut patet in idem recidunt; plura possem alia exempla addere, tum primi tum secundi casus meæ methodi, sed hæc sufficiunt, & eam esse generalem ac numquam fallere satis probant. Demonstrationem regulæ non adjicio nec plerosque alios usus qui illius perfectionem confirmare possent, nec inventionem centrorum gravitatis asymptotωn quorum exemplum misi doctissimo D. de Roberval.

Ad eamdem Methodum.

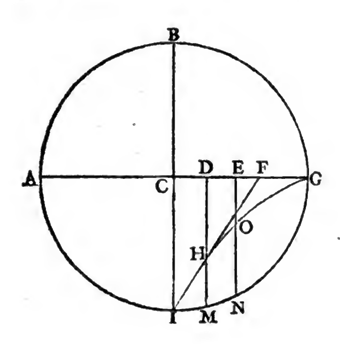
DOctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita Methodus de inventione maximæ & minimæ, cujus beneficio terminantur quæstiones omnes dioristicæ, & famosa illa problemata quæ apud Pappum in Præf. lib. 7. difficiles determinationes habere dicuntur, facillimè determinantur.

Lineæ curvæ, in quibus tangentes, inquirimus, proprietates suas specificas vel per lineas rectas tantùm absolvunt, vel per curvas, rectis aut alijs curvis quomodolibet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est præcepto, quod quia concisum nimis, difficile sanè, sed tamen sufficiens tandem repertum est.

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvæ rectas duas positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva ampliùs, sed in invenienda tangente, per æqualitatem consideramus, & elisis, quæ monet doctrina de maxima & minima, homogeneis fit demum æqualitas, quæ punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideóque ipsam tangentem.

Exemplis, quæ olim multiplicia dedimus, addatur, si placet, tangens cissoidis, cujus Diocles traditur inventor.



Esto circulus duabus diametris AG, BI, normaliter sectis, & sit cissois IHG, in qua sumpto quolibet puncto, ut H, ducenda est à puncto H, tangens ad cissoidem, sit factum, & ducta tangens HF, secet rectam CG, in F, ponatur recta DF, esse A, & sumpto quolibet puncto inter D, & F, ut E, ponatur recta DE esse E. Cum igitur ex proprietate specifica cissoïdis recta MD, sit ad DG, ut DG, ad DH, fiat jam in terminis analyticis per adæqualitatem, ut NE, ad EG, ita EG, ad portionem rectæ EN, quæ intercipitur inter punctum E, & tangentem, & est EO,

Vocetur AD, data Z.
DG, data N.
DH, data R.
DF, quæsita, ut diximus, A,
DE, sumpta ad libitum E.
Ergo EG, vocabitur N–E.
EO, vocabitur $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$.
EN, vocabitur latus Z in N – Z in E + N in E – E².

Cùm igitur ex præcepto proprietas specifica debeat considerari, non amplius in curva, sed in tangente, ideoque faciendum sit ut NE, ad E G, ita E G, ad EO, quæ applicatur tangenti: ergo in terminis analyticis faciendum ut

Latus Z in N – Z in E + N in E – E²,
Ad N – E.
Ita N – E.
Ad $\frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$.

Et quadratis singulis terminis ad vitandam asymmetriam fiet ut

Z in N – Z in E + N in E – E².
Ad N², + E². – N in ²E.
Ita N² + E².
Ad $\frac{R^2 A^2 + R^2 E^2 - R^2 A^2 E}{A^2}$.

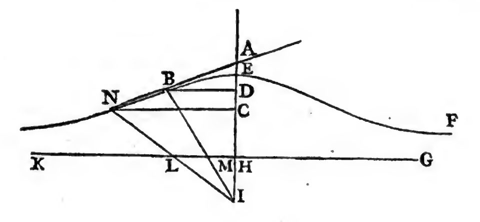
Ducantur singula homogenea in A², & deinde quod fit sub extremis, adæquetur ex præceptis artis, ei quod fit a medio, elisis deinde superfluis, ut monet methodus, tandem orietur æqualitas inter

Z² A + N A, ex una parte, & Z² N, ex altera.

Construetur igitur tangens hoc pacto. Producatur semidiameter circuli dati A ad punctum V, & fiat A V recta æqualis A C, rectæ, Rectangulum A D G ad rectam V D, applicetur, & faciat latitudinem D F, juncta recta F H, tanget cissoïdem.

Indicemus etiam modum agendi in Conchoide Nicomedæâ, sed indicemus tantum, ne proclivior evadat sermo.

Esto conchois Nicomedæa, ut construitur apud Pappum & Eutocium figura sequens.



Polus est punctum I, recta K G, est asymptotos curvæ, recta I H E, perpendicularis ad asymptoton. Punctum N datum in curva, ad quam ab eo puncto ducenda tangens B A concurrens cum I E in puncto A, sit factum ut supra, ducatur N C, parallela K G, ex proprietate specifica curvæ, recta L N est æqualis rectæ H E. Sumatur quodlibet punctum inter C & E, ut D à quo rectæ C N parallela ducatur D B, occurrens tangenti in puncto B. Quia igitur proprietas speccifica debet considerari in tangente, jungatur B G, occurrens rectæ K G, in M, & ex præceptis artis recta M B adæquetur rectæ H E, orietur tandem quæsita æqualitas, quod ut prodeat,

C A, ut supra vocetur A

C D, sit E

E N data sit Z

Et reliquæ datæ suis nominibus designentur.

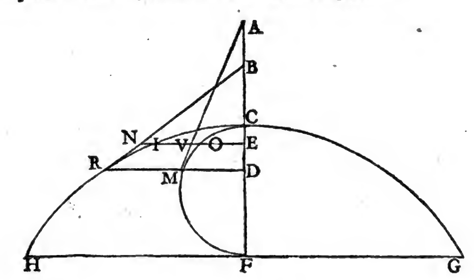
Invenietur facillimè recta M B, in terminis analyticis, quæ si adæquetur, ut dictum rectæ H E, solvetur quæstio.

Hæc de priore casu videntur sufficere. Licet enim praxes infinitæ suppetant, quæ prolixitates evitant; ex his tamen nullo negotio deduci possunt.

Secundo casui, quem difficilem judicabat D. DesCartes, cui nihil difficile, elegantissima, & non insubtili methodo fit satis.

Quamdiu rectis tantùm lineis homogenea implicabuntur, quærantur ipsa & designentur per præcedentem formulam, Imò & vitandæ asymmetriæ causa aliquando, si libuerit, applicatæ ad tangentes ex superiore methodo inventas, pro applicatis ad ipsas curvas sumantur, & demùm, quod operæ pretium est, portiones tangentium jam inventarum pro portionibus curvæ ipsis subjacentis sumantur, & procedat æqualitas, ut supra monuimus, proposito nullo negotio satisfiet.

Exemplum in curva Cycloide D. De Roberval assignamus.



Sit curva H R I C, cujus vertex C, axis E F, & descripto semicirculo C O M F, sumatur punctum quodlibet in curva, ut R, a quo est ducenda tangens R B, ducatur à puncto R recta R M D, perpendicularis in C D F, quæ secet semicirculum in M. Ea igitur curvæ proprietas specifica est, ut recta R D, sit æqualis portioni circuli A M, & applicatæ D M: Ducatur in puncto M, ex præcedente methodo tangens M A, ad circulum, (eadem nempe procederent si curva C O M esset alterius naturæ) Ponatur factum quod quæritur, & sit recta D B quæsita, æqualis A, D A inventa ex constructione æqualis B.

M A itidem inventa vocetur D,

M D data vocetur R,

R D vocetur Z

C M portio circumferentiæ data sit N

D E recta utcumque assumpta sit E,

Et a puncto E ducatur E O V I N parallela rectæ R M D,

Fiat ut A ad A − E, ita Z ad $\frac{ZA - ZE}{A}$ quæ idcirco æquabitur rectæ N I O V E;

Igitur recta $\frac{ZA - ZE}{A}$ debet æquari propter proprietatem specificam curvæ quæ in tangente consideranda est, rectæ O E, unà cum curva C O. Curva autem C O æquatur curvæ C M − curvâ M O. Ergo recta $\frac{ZA - ZE}{A}$ debet æquari rectæ O E, & curvæ C M − curvâ M O. Ut autem hi termini ad terminos analyticos reducantur, pro rectâ O E, ad vitandam asymmetriam, ex superiore cautione sumatur recta E V, applicata tangenti; & pro curva M O, sumatur portio tangentis M V, cui ipsa M O adjacet: ad inveniendam autem E V, in terminis analyticis fiet ut B ad B − E, ita R ad $\frac{RB - RE}{B}$ quæ idcirco æquabitur ipsi E V.

Ad inveniendam deinde M V, fiet ut B, ad D, ita E ad $\frac{DE}{B}$, quæ idcirco propter triangulorum similitudinem, ut supra, æquabitur M V: Curva autem C M, vocata est N, igitur in terminis analyticis fiet æqualitas inter $\frac{ZA - ZE}{A}$ ex una parte

Et $\frac{RB - RE}{B} + N - \frac{DE}{B}$, ex altera;

Ducantur omnia in B A,

$ZBA - ZBE \propto RBE - RAE + BNA - DAE$,

Cum autem ex proprietate curvæ $Z \propto R + N$ ergo

$ZBA \propto RBA + BNA$,

Ideoque ablatis communibus, reliqua comparentur,

Nempe Z B E, cum R A E + D A E,

Fiat divisio per E. Et quia nullum est hoc casu homogeneum superfluum, nulla fieri debet elisio. Igitur

$ZB \propto RA + DA$. Et fiet ut

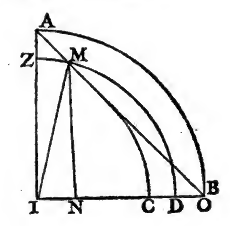
R + D, ad B, ita Z, ad A.

Ad construendum igitur problema, si fiat ut aggregatum rectarum M A, M D, ad rectam D A, ita R D, ad DB. Juncta B R tanget curvam C R. Quia verò ut summa rectarum M A, MD, ad D A, ita M D, ad D C, ut facile est demonstrare. Ideo faciendum erit ut M D ad D C, ita R D, ad D B, sive ut elegantior evadat constructio junctæ rectæ M C, ducenda erit parallela R B.

Eadem methodo species omnes illius curvæ tangentes suas nanciscentur.

Constructionem generalem olim dedimus.

Quoniam verò quæsitum est de tangente quadratariæ, sive quadratricis Dinostrati, ita construimus ex præceptis præcedentibus.



Sit quadrans circuli A I B, quadrataria A M C, in qua ad datum punctum M, ducenda est tangens. Juncta M I, centro I, intervallo I M quadrans Z M D, describatur, & ducta perpendiculari M N, fiat ut I M ad M N, ita portio quadrantis M D, ad rectam N O, juncta M O, tanget quadratariam; hæc sufficiant.

Quia tamen sæpiùs curvatura mutatur, ut in Conchoïde Nicomedæa, quæ pertinet ad priorem casum, & in omnibus speciebus curvæ Domini De Roberval, primâ exceptâ quæ pertinet ad secundum, ut perfectè curva possit delineari, investiganda sunt ex arte puncta inflexionum, in quibus curvatura ex convexâ fit concava, vel contra. Cui negotio eleganter inservit doctrina de maximis & minimis. Hoc præmisso lemmate generali.

Esto in sequenti figura curva AH F G, cujus curvatura in punctoH, verbi gratiâ, mutetur; Ducatur tangens H B, applicata H C, angulus H B C, erit minimus omnium quos tangentes cum axe A C D, sive infra, sive supra punctum H, efficiunt, ut facile est demonstrare. Sumatur enim supra H, punctum, punctum M, tangens occurret axi inter A & B, ut in N, igitur angulus ad N major erit angulo ad B. Similiter si infra punctum H, sumatur punctum F punctum D, in quo concurrit tangens F D, cum axe erit inferius puncto B, & tangens D F, occurret tangenti BH, ad partes F & H. Igitur angulus ad D, erit major angulo ad B. Casus omnes non persequimur, sed modum tantùm investigandi indicamus, cum curvarum formarum infinitas species exhibeant. Ut igitur verbi gratiâ, in exposito diagrammate punctum H, inveniatur, quæratur primùm ex superiore methodo ad punctum quodlibet curuæ utcumque sumptum proprietas tangentis. Hâc inventâ quæratur per doctrinam de maximis & minimis punctum H, à quo ducendo perpendicularem H C, & tangentem H B, recta H C, ad C B, habeat minimam proportionem. Eâ enim ratione angulus ad B erit minimus. Dico punctum H, ita inventum esse initium mutationis in curvatura.

Ex prædicta methodo de maximis & minimis derivantur artificio singulari inventiones centrorum gravitatis, ut aliàs indicavi.

Sed & coronidis loco possunt etiam & datâ curvâ inveniri ipsius asymptoti quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates. Sed hæc si libuerit, fusiùs aliquando explicabimus & demonstrabimus.





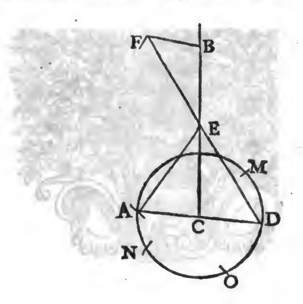
DE CONTACTIBUS SPHÆRICIS.

APOLLONII Pergæi doctrinam περὶ ἐπαφῶν restituit eleganter Apollonius Gallus aut sub illius nominis larvâ Franciscus ille Vieta Fontenæensis cujus miræ in Mathematicis lucubrationes veteri geometriæ felices præstitere suppetias. Verùm qui materiam hanc contactuum quæ hactenus substitit in planis, ulteriùs promoverit, & ad sphærica problemata evehere sit ausus, adhuc, quod sciam, extitit nemo; præclara tamen inde problemata deduci & ad elegantem sublimiorum problematum constructionem facillimè derivari patebit statim. Quærenda itaque sphæra qua per data puncta transeat aut sphæras & data plana contingat. Quindecim problematis totum negotium absolvetur.

PROBLEMA I.

Datis quatuor punctis sphæram invenire quæ per data transeat.

Dentur quatuor puncta N O M F, per quæ Sphæra describenda est sumptis ad libitum tribus N O M, circa triangulum N O M, quod in uno esse plano constat ex elementis; describatur circulus N A O M, quem & magnitudine & positione dari perf-

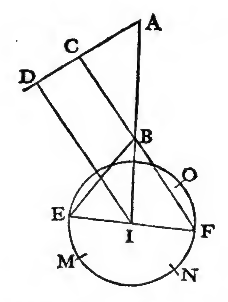


picuum eſt, eſſe autem circulum N A O M, in ſuperficie inveniendæ Sphæræ patet, ex eo quod ſi Sphæra plano ſecetur ſectionem datò circulum, at per tria puncta N M O, Unicus tantùm circulus deſcribi poteſt, quem jam conſtruximus, cum igitur tria puncta N O M ſint in ſuperficie Sphæræ quæſitæ, ergo planum trianguli N O M, Sphæram quæſitam ſecat ſecundum circulum N A O M, quem ideo in ſuperficie Sphæræ eſſe concludimus. Sit ipſius centrum C, à quo ad planum circuli excitetur perpendicularis C E B, patet in recta C B, eſſe centrum Sphæræ quæſitæ, à puncto F, in rectam C B, demittatur perpendicularis F B, quam & poſitione & magnitudine dari perſpicuum eſt, à puncto C, ducatur C A D, ipſi F B, parallela, erit igitur angulus B C A rectus, ſed & recta B C, eſt perpendicularis ad planum circuli. Ergo recta A C D, eſt in plano circuli, & datur poſitione, dantur itaque puncta A D, in quibus cum circulo concurrit, ponatur jam factum eſſe, & centrum inveniendæ Sphæræ eſſe E, quod quidem in rectâ C B, reperiri jam diximus ex Theodoſio junctæ rectæ F E, A E, E D, erunt æquales, cum tria puncta nempe F, ex hypotheſi & A, & D, ex demonſtratis ſint in ſuperficie ſphærica, at tres rectæ F E, A E, E D, ſunt in eodem plano, cum enim rectæ F B, A C D, ſint parallelæ, erunt in eodem plano, ſed & recta C B, ideoque tres F E, A E, D E; ſi igitur circa tria puncta data A F D, deſcribatur circulus, ejus centrum E, erit in recta C B, ac proinde & Sphæræ quæſitæ centrum & Sphæra ipſa non latebunt.

PROBLEMA II.

Datis tribus punctis & plano invenire ſphæram quæ per data puncta tranſeat, & planum datum contingat.

DEntur tria puncta N O M, per quæ circulus deſcriptus M E O N, erit ad ſuperficiem Sphæricam quæſitam ex jam demonſtratis, & in excitatâ ad planum circuli rectâ I B A, invenietur centrum Sphæræ quam quærimus; concurrat recta I B A, cum



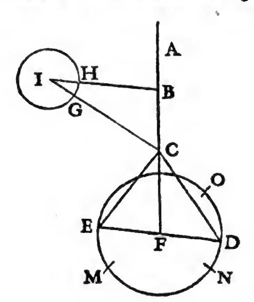
plano dato in puncto A, dabitur igitur punctum A, poſitione à centro circuli N E O M, demittatur perpendicularis in planum datum I D, dabitur igitur punctum D, ideoque & recta A D, poſitione & magnitudine, & pariter rectæ I D, & I A, dabitur igi-

tur planum trianguli A D I positione, datur autem & planum circuli M O N, positione, ergo communis illorum planorum sectio F I E, dabitur positione, ideóque dabuntur puncta E & F, in circulo. Sit factum & centrum sphæræ quæsitæ punctum B. Jungantur rectæ B E, B F, & rectæ I D, parallela ducatur B C, cum triangulum A D I, & recta E I F, sint in eodem plano, ergo rectæ E B, B F, B C, erunt in eodem plano, sed recta I D, est perpendicularis ad planum datum, ergo recta B C, ipsi parallela, est etiam perpendicularis ad planum datum; cum igitur sphæra describenda planum A D, datum contingere debeat, ergo ab ipsius centro demissa in planum perpendicularis B C, dabit punctum contactus C, rectæ igitur B C, B E, B F, erunt æquales & probatum est eas esse in eodem plano positione dato, in quo & recta A D. Eò itaque deducta est quæstio ut datis duobus punctis E & F, & rectâ A D, in eodem plano, quæratur circulus qui per data duo puncta transeat & rectam datam contingat, cui problemati satisfecit Apollonius Gallus, dabitur igitur centrum sphæræ B, & omnia constabunt.

PROBLEMA III.

Datis tribus punctis & sphærâ invenire Sphæram quæ per data puncta transeat & sphæram datam contingat.

Dentur tria puncta M, N, O, & sphæra I G, datur circulus M O N, in sphæra quæsitâ, ad planum circuli erecta perpendicularis F C B, ut supra continebit centrum sphæræ quam quærimus, à centro I, sphæræ datæ demittatur in rectam F B, perpendicularis I B, quæ dabitur positione & magnitudine, à centro F, ipsi parallela ducatur E D, quæ erit ex jam demonstratis in plano circuli, & dabuntur puncta E & D, sit factum, & centrum sphæræ quæsitæ C, ergo rectæ I C, C E, C D, erunt in eodem plano quod & datum est, cum dentur puncta I, E, D. Contactus autem duarum sphærarum est in rectâ ipsarum centra connectente, ergo tanget sphæra quæsita sphæram datam in puncto G, recta igitur I C, superabit rectas C E, C D, radio I G, centro I, intervallo radij sphærici dati describatur circulus in plano dato rectarum I C, C E, E D, transibit igitur per punctum G, & circulus ille positione & magnitudine dabitur sed & puncta E & D in eodem plano. Eò itaque deducta est quæstio ut ex Appollonio Gallo quæratur methodus quâ datis duobus punctis & circulo in eodem plano, inveniatur circulus qui per data duo puncta transeat & circulum datum contingat.

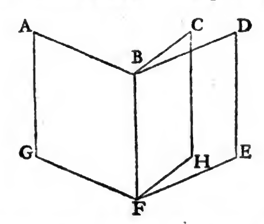


PROBLEMA IV.

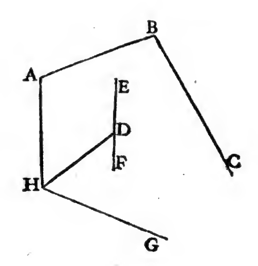
Datis quatuor planis invenire ſphæram quæ data quatuor plana contingat.

DEntur quatuor plana AH, AB, BC, HG quæ à ſphærâ quæſitâ contingi oporteat.

Sint duo plana AF, FD quæ ab eadem ſphærâ contingantur, biſecetur ipſorum inclinatio per planum BFHC, patet centrum ſphæræ quæ duo plana AF, FD contingit eſſe in plano biſecante, ut videatur inutile in re tam proclivi diutiùs immorari, ſi pla-



na AF, FD, eſſent parallela ſphæræ, centrum eſſet in plano ipſis parallelo, & intervallum ipſorum biſecante, hoc poſito propter plana CB, BA, poſitione data quod nempe datorum CB, BA, planorum inclinationem datam biſecat. Sed propter duo plana BA, AH, eſt idem centrum ſphæræ quæſitæ ad aliud planum poſitione datum; ergo communis ſectio duorum planorum poſitione datorum, quorum alterum incli-

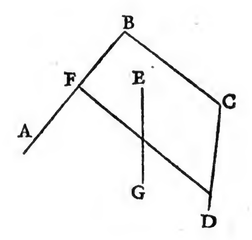


nationem planorum C B, B A, alterum inclinationem planorum B A, A H, bisecat, dabit rectam positione datam, in quâ inveniendæ sphæræ centrum erit. Sit illa recta F E, sed propter duo plana A H, H G, est etiam centrum sphæræ quæsitæ ad aliud planum positione datum cujus concursus cum recta F E, positione datâ dabit punctum D, quod patet esse sphæræ quæsitæ centrum, & reliqua constabunt.

PROBLEMA V.

Datis tribus planis & puncto invenire sphæram quæ per punctum datum transeat & plana data contingat.

Sint data tria plana A B, B C, C D, & punctum H, quærenda sphæra quæ data tria plana contingens transeat per punctum H. Sit factum; tria plana data ex præcedentis propositionis ratiocinio dabunt rectam positione datam quæ sedes erit centri sphærici quæsiti. Sit illa G E, in quam à puncto dato H demittatur perpendicularis

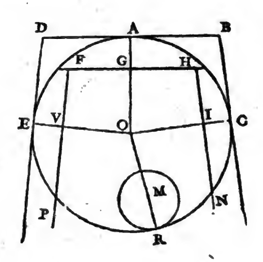


H I, quæ & positione & magnitudine dabitur, producatur ad F, ut sit I F, æqualis I H, dabitur punctum F, cum autem sphæræ quæsitæ centrum sit in recta G E, ad quam ducta est perpendicularis H F bifariam secta in I, cujus unum ex extremis H est ad superficiem sphæricam ex hypothesi, erit & alterius extremum F, etiam ad sphæricam superficiem. Imò & circulus centro I, interuallo I H, descriptus in plano recto ad rectam G E erit ad superficiem sphæræ; datur autem ille circulus positione & magnitudine, dato autem circulo sphærico positione & magnitudine & aliquo plano ut A B. Datur ex facili propositionis secundæ hujus consectario sphæra ad cujus superficiem sit circulus datus & quæ planum datum contingat, deducta est itaque quæstio ad secundam hujus, nec reliqua latebunt.

PROBLEMA. VI.

Datis tribus planis, & ſphærâ, invenire ſphæram quæ datam ſphæram & plana data contingat.

DEntur tria plana E D, D B, B C, & ſphæra R M, conſtruenda eſt ſphæra quæ datam ſphæram & tria pariter plana contingat. Sit factum & ſphæra E R C H, ſatisfaciat propoſito ſphæram nempe in puncto R.

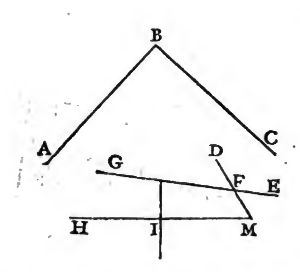


Et plana in punctis E, A, C, contingens, ſphæræ, E R C H, centrum ſit O, junctæ R O, E O, A O, C O, erunt æquales, ſed & recta O R, tranſibit per datæ ſphæræ centrum M, & rectæ E O, O A, O C, erunt perpendiculares ad plana data D E, D B, B C. Fiant rectæ O M, æquales rectæ O V, O G, O I, & per puncta V G I intelligantur duci plana V P, G H, I N, datis E D, D B, B C, parallela, cum recta O R, æqualis ſit O E, & ablata O M, ablatæ O V, erit reliqua R M, reliquæ V E, æqualis, datur autem magnitudine R M, cum ſit radius ſphæræ datæ; datur igitur & V E magnitudine; cum autem OE, ſit perpendicularis ad planum D E, erit etiam perpend. ad planum PV, plano D E, parallelum, recta igitur VE, erit intervallum planorum D E, & PV, ſed datur V E magnitudine ex demonſtratis, ergo datur planorum D E, P V, intervallum; ſunt autem parallela hæc duo plana, & datur D E poſitione ex hypotheſi; datur igitur & P V, poſitione. Similiter probabitur plana G H, I N, dari poſitione & rectas O V, O G, O I, ad ipſa eſſe perpendiculares & æquales rectæ O M, ſphæra igitur centro O, intervallo O M, deſcripta plana P V, G H, I N, poſitione data contingit. Datur autem punctum M, cum ſit centrum ſphæræ datæ. Eò itaque deducta eſt quæſtio ut datis tribus planis P V, G H, I N, & puncto M. inveniatur ſphæra quæ per datum punctum M, tranſeat & data plana P V, G H, I N, contingat; hoc eſt deducitur quæſtio ad præcedentem, nec abſimili in ſequentibus artificio cum nulla in datis puncta reperientur, ſed ſphæræ tantùm aut plana, in locum unius ex ſphæris punctum datum ſubſtituetur.

PROBLEMA VII.

Datis duobus punctis & duobus planis invenire Sphæram quæ per data puncta transeat & plana data contingat.

DEntur duo plana A B, B C, & duo puncta H M. quærenda sphæra quæ per puncta H & M transeat & plana A B, B C, contingat. Jungatur recta H M, & bisecetur



in I, punctum I, dabitur, per punctum I, trajiciatur planum ad rectam HM, rectum, cum Sphærica superficies puncta H, M, contineat, certum est centrum Sphæræ esse in plano ad rectam H M, normali, & per punctum I, transeunte, datur autem hoc planum positione cum recta HM, & punctum I. Sint data positione, ergo centrum sphæræ propter puncta H & M, est ad planum datum. Sed & propter plana A B, B C, ut jam superiùs demonstravimus, est ad aliud planum datum, ergo est ad rectam positione datam, sit illa G E, in quam demissa ab uno ex punctis datis M, recta M F, dabitur positione & magnitudine & continuata in D, ut sit F D, æqualis M F, erit punctum D, datum & ex superius demonstratis erit etiam ad sphæricam superficiem, dantur itaque tria puncta H M D, per quæ sphæra quæsita transit, datur etiam planum A B, quod ab eadem sphærâ contingi debet; deducta est itaque quæstio ad problema secundum hujus.

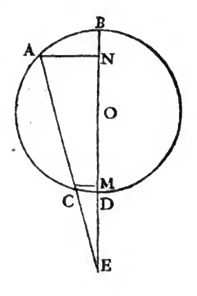
Priusquam progrediamur ulterius, præmittenda lemmata quædam facillima.

LEMMA I.

SIT circulus B C D, extra quem sumpto quolibet puncto E, trajiciatur per centrum recta E D, O B, ducatur quælibet E C B, patet ex elementis rectangulum A E C, æquari rectangulo B E D. Sit jam sphæra circa centrum O, cujus maximus circulus sit A C D B, si ab eodem puncto E per quodlibet punctum superficiei sphæricæ trajiciatur recta E C A, donec sphæræ ex altera parte occurrat, rectangulum A E C, erit similiter æquale rectangulo B E D, si enim intelligatur circa rectam immobilem B D E,

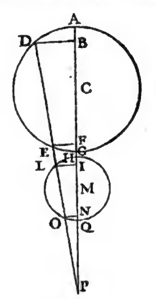
conuerti

converti,& circulus & recta E C A, simul non immutabuntur rectæ E C, & E A, cum puncta C, & A, circulos describant ad axem rectos, nec idcirco rectangulum A E C, erit itaque in quocumque plano æquale rectangulo B E D.



LEMMA II.

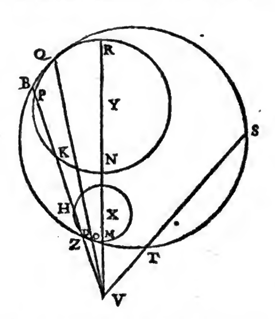
Sint duo circuli in eodem plano A D E, H L O, per centra ipsorum trajiciatur recta A C M P, & fiat ut radius A C ad radium H M, ita recta C P, ad rectam M P, & à puncto P, ducatur ad libitum recta P O L E D, ambos circulos secans in punctis O E L D; demonstravit Apollonius Gallus rectangula A P Q, G P H esse æqualia & ipsorum cuilibet æquari rectangula D P O, E P L. In sphæricis idem quoque verum esse sequentium problematum interest, patet autem ex eo quod si circa axem A P immobilem tam circuli duo quàm recta P O L E D, eodem tempore convertantur, non immutabuntur rectæ P O, P L, P E, P D, propter allatam in superiori lemmate rationem nec idcirco rectangula, & in quocumque plano constabit propositum.



L.

LEMMA III.

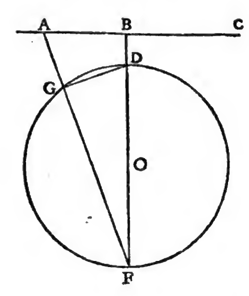
Sint duæ ſphæræ datæ Y N, X M per quarum centra trajiciatur recta R Y N X M V, & fiat ut radius Y N ad radium X M, ita recta Y V, ad rectam V X, à puncto V ducatur in quolibet plano recta V T S, & ſit rectangulum S V T æquale rectangulo R V M, ſi deſcribatur ſphæra quævis quæ per puncta T S, tranſeat & unam ex duabus datis contingat, alteram quoque continget. Sit enim ſphæra O T S, per puncta T & S deſcripta & ſphæram M X, in puncto O, contingens, aio ſphæram Y N, etiam à ſphæra O T S contactam iri, producatur recta V O, donec ſphæræ O T S, occurrat in Q, re-



ctangulum igitur Q V O ex primo lemmate eſt æquale S V T, ſed rectângulum SVT ex conſtructione eſt æquale rectangulo R V M, cui ex ſecundo lemmate eſt æquale rectangulum ſub V O, & rectâ per puncta V & O ad ſuperficiem ſphæricam ſphæræ Y N, productâ, ergo punctum Q eſt ad ſuperficiem ſphæræ Y N, commune igitur eſt & ſuperficiei ſphæræ Y N, & ſuperficiei ſphæræ O T S. Aio has duas ſphæras in puncto eodem Q, ſe contingere, ducatur enim à puncto V, quælibet recta in quolibet plano ſphæræ O T S, & ſit verbi gratia V Z, quæ producta ſecet ſphæras tres in punctis Z D H K P B, rectangulum Z V B in ſphæra O T S, per primum & ſecundum lemma eſt æquale D V P rectangulo, ſphæris duabus X M, & Y N, terminato. Sed D V, eſt major recta V Z, cum enim ſphæra O T S, tangat exteriùs ſphæram X M in puncto O, recta ſecans ſphæram O T S, prius ipſi occurret quàm ſphæræ X M. Cum ergo probatum ſit rectangulum D V P, æquari rectangulo Z V B, & recta Z V, ſit minor recta D V, ergo recta P V erit minor rectâ B V, punctũ igitur B extra ſphæram Y N cadet. Simili ratiocinio concludetur omnia puncta ſphæræ ambientis exteriùs cadere, præter punctum Q, tangit igitur ſphæra O T S, ſphæram Y N quod erat demonſtrandum, nec abſimilis aut difficilior in contactibus interioribus, & in omnibus caſibus demonſtratio.

LEMMA IV.

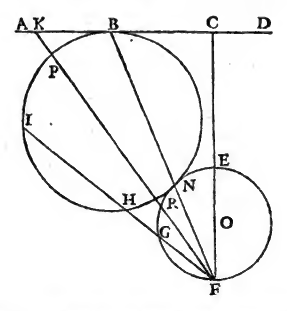
Sit planum A C, & ſphæra D G F, cujus centrum O, per centrum O, ducatur F O D B perpendicularis ad planum & à puncto F ducatur recta quævis ad planum ſphæram ſecans in G, & planum in A. Aio rectangulum A F G, æquari rectangulo B F D, nam ſecetur ſphæra ad planum datum, per planum trianguli A B F, & fiat circulus G F D in ſphærâ, in plano autem recta A B C, cum recta F B, ſit perpendicularis ad



planum A C, erit etiam perpendicularis ad rectam A C, habens igitur circulum DGF, & rectam A C in eodem plano, & rectam F D B per centrum circuli transeuntem ad A C perpendicularem jungatur G D, anguli ad G, & ad B, sunt recti, ergo quadrilaterum A B D G, est in circulo, ideoque rectangulum A F G æquale est rectangulo BFD, quod etiam in quavis alia sphæræ sectione similiter demonstrabitur.

LEMMA V.

SIT planum A B D, & sphæra E G F, cujus centrum O, per centrum O trajiciatur recta F O E C perpendicularis ad planum, & in quovis alio puncto ducatur recta F H I, sitque rectangulum I F H æquale rectangulo C F E. Si per puncta I H, describatur



sphæra quæ planum A C contingat, eadem sphæra tanget sphæram E G F, intelligatur construi sphæra I H B, quæ per puncta I & H, transiens tangat planum A C, in puncto B I, aio sphæram E G F contingi à sphæra I H B, jungatur recta F B & rectangulo C F E, fiat æquale rectangulum B F N, punctum N, per præcedentem erit ad superfi-

ciem ſphæræ E G F, ſed & rectangulum C F E, ex conſtructione eſt æquale rectangulo I F H, rectangula igitur I F H, B F N, ſunt æqualia; ideoque punctum N, eſt etiam ad ſuperficiem ſphæræ I BH. Probandum jam ſphæram E G F, à ſphæra I BH, in puncto N contingi, quod quidem facile eſt, à puncto enim F, per quodlibet punctum ſphæræ E G F, ducatur recta F R, quæ ſphæram I B H, in H & P, & planum A C in K ſecet, rectangulum K F R ex præcedente lemmate æquatur rectangulo C F E, cui ex conſtructione æquatur rectangulum D F H, ideoque P F H rectangula, igitur K F R, & P F H ſunt æqualia, ſed recta K F eſt major recta F P, quia ſphæra I B H, tangit planum A C in B, ergo recta F R eſt minor recta F H, punctum igitur R eſt extra ſphæram I B H. Idem de quocumque alio puncto in quovis plano ſphæræ E G F, ex utraque puncti N parte probabitur; manifeſtum itaque ſphæram E G F, à ſphærâ I B H, in puncto N contingi.

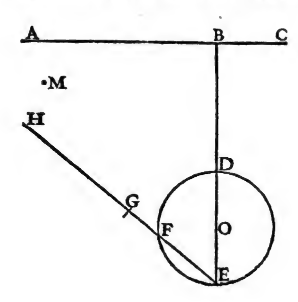
Hæc lemmata licet ſint facilia, pulcherrima tamen ſunt, tertium præſertim & quintum, in tertio quippe infinitæ ſunt ſphæræ quæ per puncta T & S tranſeuntes ſphæram X M, contingunt, ſed omnes illæ in infinitum tangent quoque ex demonſtratis ſphæram Y N, in quinto autem lemmate infinitæ ſunt ſphæræ quæ per puncta I & H tranſeuntes planum A C contingunt, ſed omnes illæ pariter in infinitum ſphæram E G F, ex demonſtratis contingent.

His ſuppoſitis reliqua problemata facilè exequemur.

PROBLEMA VIII.

Datis duobus punctis plano & ſphærâ invenire ſphæram quæ per data puncta tranſeat & ſphæram ac planum datum contingat.

SIT datum planum A B C, ſphæra D F E, & puncta H M, per centrum ſphæræ datæ O in planum A B C, datum demittatur perpendicularis E O D B, jungatur H E, & rectangulo B E D, fiat æquale rectangulum H E G; dabitur itaque punctum G, datis tribus punctis H, G & M, & plano A B C, quæratur ſphæra per 2. pro-

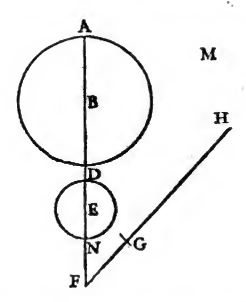


blema hujus, quæ per data tria puncta transeat & planum A B C datum contingat. Sphæra illa satisfaciet proposito, transit quippe per data duo puncta H & M, & planum A B C tangit ex constructione, sed & sphæram D F E contingit, ex quinto lemmate; nam cum rectangulum H E G, æquetur rectangulo B E D, omnis sphæra quæ per data duo H & G puncta transiens planum A B C tangit, sphæram quoque D E F contingit.

PROBLEMA IX.

Datis duobus punctis & duabus sphæris invenire sphæram quæ per data duo puncta transeat & sphæras datas contingat.

Sint datæ duæ sphæræ A B, D E, & puncta data, H & M, trajiciatur recta A F, per centra sphærarum datarum, & ut radius A B ad radium D E. ita fiat recta B F, ad FE,

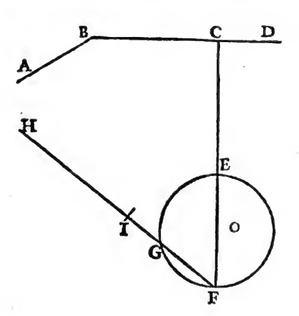


dabitur punctum F, fiat rectangulo N F A, æquale rectangulum H F G, dabitur punctum G. Jam datis tribus M, G, H, punctis & sphærâ D N, quæratur sphæra quæ per data tria puncta transeat & sphæram D N datam contingat, cui problemati satisfaciet tertium problema hujus, continget quoque sphæram ex 3. lemmate ideoque proposito satisfaciet.

PROBLEMA X.

Dato puncto, duobus planis, & sphærâ invenire sphæram, quæ per datum punctum transeat & sphæram, ac data duo plana contingat.

SInt duo plana A B, B D, sphæra E G F, punctum H, per punctum O centrum sphæræ datæ in quodlibet ex planis demittatur perpendicularis CEOF, & rectangulo



C F E, fiet æquale rectangulum H F I, datis duobus punctis H, & I, & duobus planis A B, B D. Quæratur per septimum problema hujus sphæra quæ per data duo puncta transeat & duo plana data contingat, continget quoque ex quinto lemmate sphæram, & proposito satisfaciet.

PROBLEMA XI.

Dato puncto, plano, & duabus sphæris invenire sphæram quæ per datum punctum transeat & planum, ac sphæras duas datas contingat.

DEducetur statim quæstio simili præcedentibus ratiocinio ad problema octavum, datis duobus punctis, plano & sphærâ, idque beneficio lemmatis quinti. Quod si libeat uti lemmate tertio deducetur quæstio pariter ad idem problema alio medio & aliâ constructione.

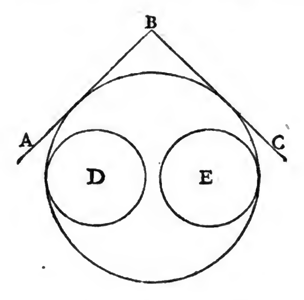
PROBLEMA. XII.

Dato puncto & tribus ſphæris, invenire ſphæram quæ per datum punctum tranſeat & ſphæras datas contingat.

HUic quoque figuram non aſſignamns, ſtatim quippe beneficio lemmatis 3. deducetur quæſtio ad problema IX. datis duobus punctis, duabus ſphæris, &c.

PROBLEMA XIII.

Datis duobus planis & duabus ſphæris, invenire ſphæram quæ data plana & ſphæras contingat.



SIT factum. Si ergo ſphæricæ ſuperficiei inventæ imaginemur aliam ejuſdem centri ſuperficiem parallelam quæ à quæſitâ diſtet per radium minoris ex ſphæris, tanget hæc nova ſuperficies ſphærica plana quæ à datis diſtabunt per intervallum ejuſdem radij minoris ex ſphæris, tanget quoque ſphæram cujus radius diſtabit à radio majoris ſphæræ datæ per idem radij minoris intervallum, quæque erit majori ſphæræ concentrica, dabitur ergo, dabuntur & duo plana datis parallela & per radium minoris ex ſphæris ab ipſis diſtantia, tranſibit & hæc nova ſuperficies ſphærica per centrum minoris ex ſphæris datis, quod quidem datum eſt, pari igitur quo uſi jam ſumus in Problemate VI. artificio deducetur quæſtio ad problema X. dato puncto, duobus planis & ſphæra invenire &c.

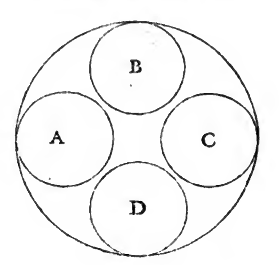
PROBLEMA XIV.

Datis tribus ſphæris & plano invenire ſphæram quæ ſphæras & planum datum contingat.

SImili quâ uſi ſumus viâ in præcedente & VI. Problemate deducetur quæſtio ad Problema XI. dato puncto, plano & duabus ſphæris &c.

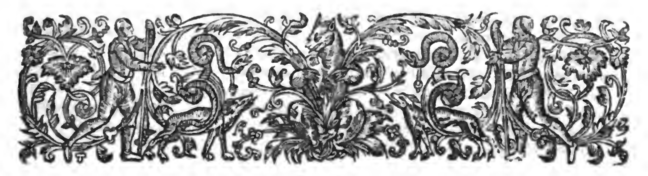
PROBLEMA XV.

Datis quatuor ſphæris invenire ſphæram quæ datas contingat.



SIT factum, & quâ uſus eſt methodo Apollonius Gallus ut problema de tribus circulis ad problema de puncto & duobus circulis deduceret, eâdem & ſimili præcedentibus famoſum hoc & nobile problema ad XII. datis tribus ſphæris & puncto deducemus. Conſtabit ex omni parte propoſitum, & illuſtre accedet Apollonio Gallo complementum.

Caſus varios, determinationes, & minuta negleximus, ne in immenſum excreſceret ſphæricus de contactibus tractatus.



DE LINEARUM CURVARUM CUM LINEIS RECTIS comparatione

DISSERTATIO GEOMETRICA.

Hæc Dissertatio typis edita fuit anno 1660. occultato Autoris nomine.



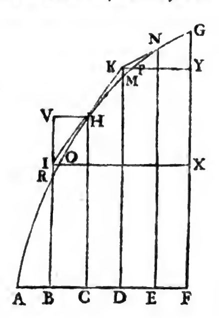
NONDUM, quod sciam, lineam curvam purè Geometricam rectæ datæ Geometræ adæquarunt. Quod enim à subtili illo Mathematico Anglo nuper inventum & demonstratum est cycloidem nempe primariam diametri circuli ipsam generantis esse quadruplam, hoc suam ex sententiâ doctissimorum Geometrarum videtur habere limitationem, ij quippe hanc esse legem & ordinem naturæ pronuntiant ut non sinat inveniri rectam curvæ æqualem, quin priùs supposita fuerit alia recta alteri curvæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipsis allato ita se habere deprehendunt, nec nos diffitemur, cum constet descriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curvæ cum rectâ, hoc est circumferentiæ circuli cycloidem generantis cum rectâ quæ est basis ipsius cycloidis. Sed quàm vera sit hæc, quam statuunt, lex naturæ, & quàm periculosum ab uno aut altero experimento statim ad axioma properare, infrà patebit. Nos enim curvam verè Geometricam & ad cujus constructionem nulla talis alterius curvæ cum rectâ æqualitas præcessisse supponatur, rectæ datæ æqualem esse demonstrabimus; & paucis, quantùm fieri poterit, totum negotium absolvemus.

PROPOSITIO PRIMA.

SIT in Figura prima curva quævis A H M G in easdem partes curva, exempli causâ, una ex parabolis infinitis in quâ tangentes extra curvam cum base A F & axe F G concurrant, & sumatur in hujusmodi curvâ quodvis punctum H per quod ducatur tangens I H K, in qua sumptis ex utraque parte punctis K & I demittantur perpendiculares I B, K D in basim A F quæ secent curvam in punctis R & M. Aio portio

nem tangentis H I portione curvæ R H esse minorem, portionem autem ejusdem tangentis H K portione curvæ H M esse majorem; Cum enim ex hypothesi tangens K I occurrat basi A F extra curvam, ergo angulus C H I qui fit ab intersectione perpendicularis in basem H C, & tangentis H I erit minor recto, ideoque à puncto H demissa perpendicularis in rectam K I cadet in punctum V supra puncta B R I. Patet itaque rectam H V minorem esse rectâ H I, item rectam H I minorem esse rectâ quæ puncta H & R conjungit; ergo à fortiori recta H I minor erit portione curvæ H R quæ rectam ab H R ad R ductam subtendit; quod primo loco fuit demonstrandum. Aio jam portionem K H portione curvæ H M esse majorem; à puncto K ducatur ad eandem curvam

Figura 1.



tangens K N & demittatur perpendicularis N E. Ex prædemonstratis probatum est rectam K N esse minorem portione curvæ N M: Sed ex Archimede summa tangentium H K, K N est major totâ portione curvæ H N. Ergo portio tangentis H K portione curvæ H M, major erit. Quod secundo loco fuit ostendendum. Nec moveat tangentem à puncto K ultra punctum G, aliquando occurrere curvæ. Hoc enim casu aliud punctum inter K & M sumi poterit, & omnia ad præcedentem demonstrationem aptari. Inde sequitur si à punctis K & I ducantur perpendiculares ad axem curvam in punctis O & P secantes, hoc casu tangentem H I curvâ H O esse majorem, tangentem verò H K curvâ H P esse minorem. Si enim imaginemur inverti figuram ita ut axis in locum baseos, basis in locum axis transferatur, non solum similis in hoc casu, sed eadem omninò erit demonstratio.

Patet autem ex ipsâ constructione, si rectæ B C & C D sint æquales portiones tangentis H I & H K esse item inter se æquales, quod tamen summopere notandum.

PROPOSITIO II.

Ad dimensionem linearum curvarum non utimur inscriptis & circumscriptis more Archimedeo, sed circumscriptis tantùm ex portionibus tangentium compositis, duas enim series tangentium exhibemus quarum una major est curvâ, altera minor: demonstrationem autem multò faciliorem & elegantiorem per circumscriptas solas evadere Analystæ experientur.

Possibile igitur, ut vult methodus Archimedea, pronuntiamus cuilibet ex curvis jam prædictis circumscribere duas figuras ex rectis constantes quarum una superet curvam intervallo quovis dato minore, altera autem superetur à curva intervallo etiam dato minore.

Exponatur curva aliqua ex prædictis in 2. Figura. Secetur basis A F in quodlibet portiones æquales, A B, B C, C D, D E, E F, F G, & à punctis B, C, D, E, F, erigantur perpendiculares B Q, C V, D Z, E R, F M, quæ occurrant curvæ in punctis P, T, Y, N, O, Ducantur item tangentes A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I. Ex primâ propositione patet tangentem A Q, portione curvæ A P esse majorem: item tangentem P V, portione curvæ P T esse majorem & sic de reliquis, tandemque etiam ultimam O I portione curvæ O H esse majorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I, portionibus curva ipsa major erit.

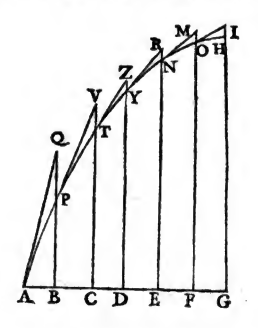


Figure 2.

At exponatur eadem curva in 3. Figura cujus basis A G in eundem portionum æqualium numerum dividatur in punctis B, C, D, E, F. à punctis B, C, D, E, F ut suprà erigantur perpendiculares B R, C Q, D O, E L, F I quæ occurrant curvæ in punctis S, P, N, M, K, à puncto autem S in hac tertia figura, ducatur tangens S T, occurrens perpendiculari A T, deinde à punctis P N, M, K, H ducantur tangentes P R, N Q, M O, K L, H I occurrentes perpendicularibus B S, C P, D N, E M, F K, in punctis R, Q, O, L, I. Ex prima propositione patet tangentem S T portione curvæ A S esse minorem, item tangentem P R portione curvæ P S esse minorem & sic deinceps, tandemque ultimam I H quæ parallela est basi, portione curvæ K H esse minorem. Ergo figura constans ex omnibus istis tangentium S T, P R, N Q, M O, K L, H I portionibus curva ipsa minor erit. *Deest hoc loco figura 3. quam ad calcem libri lector inveniet.*

Cum autem ex corollario propositionis primæ partes tangentium ab eodem puncto curvæ utrinque productarum & portionibus basis hinc inde æqualibus oppositarum sint inter se æquales: patet, cum 2. & 3. Figuræ curvæ supponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confusionis causâ duas figuras descripserimus, tangentem S T tertiæ figuræ æqualem esse tangenti P V secundæ figuræ, cum enim punctum S in tertia figura idem omninò sit cum puncto P secũdæ figuræ & portiones basis AB, BC in utraq; figura sint inter se æquales; portiones tangentium ex utraque parte ipsis oppositarum nempe recta S T in 3. figura & recta P V in 2. inter se æquales erunt. Probabitur similiter tangentem P R 3. figuræ æqualem esse tangenti T Z 2 & sic de cæteris. Quo peracto constabit primam tantùm 2. figuræ & ultimam 3. nulli ex portionibus figuræ contrariæ æquales esse. Excessus igitur quo figura secunda superat tertiam est idem quo tangens A Q 2. figuræ superat tangentem I H 3. figuræ. Sed recta I H propter parallelas æquatur portioni basis F G sive A B, supponuntur enim omnes basis portiones

M 2

æquales in utraque figura, ergo figura secunda ex tangentibus curva majoribus composita superat figuram tertiam ex tangentibus curva minoribus compositam eo ipso quo in 2. figura tangens A Q superat portionem basis A B, ipsi oppositam intervallo.

Si igitur velimus duas figuras curvæ circumscribere, alteram majorem curva, alteram verò minorem, quæ se invicem excedant intervallo minore quocumque dato, facillima erit constructio: Cum enim ex methodo tangentium jam cognita detur tangens ad punctum A, dabitur angulus Q A B, sed angulus Q B A est rectus, ergo datur triangulum Q A B, specie, datur itaque ratio rectæ A Q ad A B. Cavendum itaque est ut divisio basis ita instituatur ut differentia rectarum A Q & A B sit minor quacumque recta data, Quod ita assequemur si quæramus duas rectas in data ratione quæ se invicem excedant recta data quæ sit minor eâ quæ data est. Hoc autem problema est facile, & curandum deinde ut portio qualibet basi. A B non sit major minore duarum quæ dicto problemati satisfaciunt.

Cum igitur hac ratione invenerimus duas figuras curvæ circumscriptas, alteram majorem, alteram minorem dictâ curvá quæ se invicem excedunt intervallo minore quocumque dato, à fortiori major ex circumscriptis superabit curvam intervallo adhuc minore, & minor ex circumscriptis superabitur à curva intervallo adhuc minore.

Patet itaque ex nostra hac methodo per duplicem circumscriptionem commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam cum agitur de dimensione linearum curvarum. Quod semel monuisse & demonstrasse sufficiet.

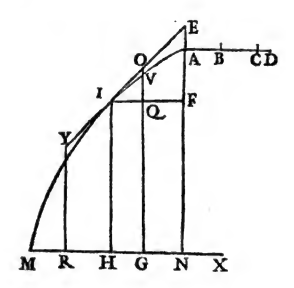
His positis securè pronuntio inveniri posse curvam verè Geometricam datæ rectæ æqualem. Ea verò est una ex infinitis parabolis, quas olim speculati sumus; illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis, de quo ne dubitent Geometræ ita breviter demonstro.

PROPOSITIO III.

SIT in 4. Figura parabole quam jam indicavimus M I V A cujus vertex A, axis A N, & in qua sumpto quovis puncto I & ductis perpendicularibus seu applicatis ad axem rectis M N, I F, cubus rectæ M N sit ad cubum rectæ I F, ut quadratum rectæ N A ad quadratum rectæ F A, idque semper contingat: probandum est curvam M I A rectæ datæ æqualem esse. Fiat ut quadratum axis A N, ad quadratum applicatæ N M, ita recta N M ad rectam A D ipsi A N perpendicularem. Patet rectam A D esse rectum dictæ parabolæ latus; hoc est solidum sub AD in quadratum rectæ A N æquari cubo applicatæ N M, item sumpto quovis alio puncto ut I, solidum sub A D in quadratum A F æquari cubo applicatæ I F, quod non eget demonstratione, in facilibus enim non immoramur: ducatur tangens ad punctum I, & sit illa IOE quæ cum axe AN in puncto E concurrat. Ex methodo tangentium constat rectam F A, rectæ A E esse duplam, ideóque rectam F E ad rectam A F esse ut 3. ad 2. quadratum verò rectæ E F esse ad quadratum rectæ A F ut 9. ad 4. à recta A D abscindatur nona ipsius pars C D & reliqua CA bisecetur in B, erit igitur D A ad A B ut 9. ad 4. sive ut quadratum E F ad quadratum A F. Solidum itaque sub A D in quadratum A F æquale erit solido sub quadrato F E in rectam A B. Sed solidum sub A D in quadratum A F est æquale cubo rectæ I F, ergò solidum sub rectâ A B in quadratum E F est æquale eidem cubo rectæ I F; est ergo ut quadratum E F ad quadratum I F ita recta I F ad rectam A B, & componendo summa quadratorum E F & F I, hoc est unicum quadratum tangentis I E est ad quadratum I F, ut summa rectarum I F & A B ad A B.

Si autem ducatur à puncto I perpendicularis ad basim recta I H & alia quævis perpendicularis G Q V O occurrens applicatæ I F in Q: curvæ in V & tangenti in O, propter similitudinem triangulorum erit ut I O ad I Q sive ipsi æqualem H G, ita tangens I E ad applicatam I F, & ut quadratum I O ad quadratum H G ita quadratum I E ad quadratum I F.

Ut autem quadratum I E ad quadratum I F, ita summa rectæ I F & A B ad rectam A B Ergo quadratum I O ad quadratum H G erit semper ut summa rectarum I E & A B ad rectam A B : Quod demonstrare oportuit.



Inde sequitur si rectæ M N ponatur in directum recta N X rectæ A B æqualis, esse semper ut quadratum tangentis I O ad quadratum rectæ H G, vel ut quadratum tangentis I Y ex altera parte ad quadratum rectæ oppositæ R H, utrobique enim propter parallelas eadem est ratio, ita rectam H X ad rectam N X. Recta enim H X æqualis est summæ rectarum I F, & A B, & recta N X est æqualis A B. Hoc autem patet ex constructione, recta enim H N propter parallelas æqualis est rectæ I F, & reliqua N X, facta est æqualis rectæ A B.

PROPOSITIO IV.

EXponatur in 5. Figura nostra hæc parabola A X E cuius sit ea, ut diximus, natura ut cubi applicatarum sint inter se in ratione quadratorum portionum axis : Sit ejus axis A I, basis aut semibasis E I ex datis axe A I & applicata I E invenitur, ut superius diximus, rectum latus A D, à quo abicissa nonâ ipsius parte C D, & reliqua A C bifariam divisa in B, secetur basis E I in quotlibet libuerit portiones æquales E F, F G, G H, H I & à punctis F, G, H excitentur perpendiculares F X, G Y, H Z curvæ occurrentes in punctis X,Y,Z. Ad puncta autem E X Y,Z, ducantur tangentes ER, XS, YT, ZV, occurrentes perpendicularibus FX, GY, H Z, I A productis, in punctis R,S,T,V. Ponatur rectæ EI in directu recta IK æqualis rectæ AB, Patet ex præcedente propositione & ipsius corollario quadratum tangentis Z V ad quadratum recta H I esse ut rectam H K, ad rectam K I . Similiter ut quadratum tangentis Y T ad quadratum rectæ G H ita rectam G K ad rectam K I ; item quadratum tangentis X S ad quadratum rectæ F G ut rectam F K ad rectam K I ; denique ut quadratum tangentis E R ad quadratum rectæ E F ita rectam E K ad rectam I K : His positis à puncto K excitetur K L perpendicularis ad rectam E K, & fiat recta K L æqualis rectæ K I sive A B : Intelligatur jam per punctum K tanquam verticem, axem autem K E, describi parabole simplex sive Archimedea cujus rectum latus sit K L, & sit illa parabola K M Q ad quam excitentur perpendiculares E Q, F P, G O, H N, I M quæ erunt, ut patet applicatæ parabolæ & in directum positæ perpendicularibus E X, G Y &c. Quadratum tangentis Z V ut jam diximus est ad quadratum rectæ H I ut recta H K ad rectam I K.

Sed ut recta H K ad rectam I K ita singulis in rectam K L ductis rectangulum sub H K in K L ad rectangulum sub I K in K L s rectangulum verò sub H K in K L ex natura parabolæ Archimedeæ æquatur quadrato applicatæ H N, & rectangulum sub I K, in K L æquatur quadrato rectæ K L, cum rectæ I K, K L factæ fuerint æquales: Erit igitur ut quadratum H N ad quadratum K L ita quadratum tangentis Z U ad quadratum rectæ H I, ideòque ut recta H N ad K L ita tangens Z U ad rectam H I. Similiter probabimus esse ut tangentem Y T ad rectam G H ita applicatam G O ad K L: Item ut tangentem X S ad rectam F G ita applicatam F P ad K L, denique ut tangentem ER, ad rectam E F ita esse applicatam E Q ad K L. Cum igitur sit ut tangens Z U ad rectam H I ita applicata HN ad K L, rectangulum sub extremis æquabitur rectangulo sub medijs, ideòque rectangulum sub N H in HI æquabitur rectangulo sub K L in tangentem Z U. Similiter rectangulum sub O G in G H æquabitur rectangulo sub K L in tangentem Y T, item rectangulum sub P F in F G æquabitur rectangulo sub K L in tangentem X S, denique rectangulum sub E Q in E F æquabitur rectangulo sub K L in tangentem E R: Quid autem pluribus in re proclivi & jam ad methodum Archimedeam sponte sua vergente immoramur? Per inscriptas enim & circumscriptas in segmento parabolico figuras, rectangula omnia Q E F, P F G, O G H, N H I segmentum ipsum parabolicum EQ M I designabunt. Omnes autem tangentes ER, X S Y T, Z U per iteratam secundùm nostræ præcepta methodi circumscriptionem curvam ipsam E X Y Z A etiam designabunt; ergo segmentum parabolicum E Q M I æquatur rectangulo sub K L in curvam E X A. Datur autem in rectilineis segmentum parabolicum E Q M I, quadravit enim parabolam Archimedes ideòque ipsius segmenta. Ergo rectangulum sub K L in curvam E X A etiam datùr: datur autem recta K L. Ergo datur curva E X A & ipsi alia recta potest constitui æqualis, quod erat demonstrandum.

Si quibusdam tamen hæc demonstratio brevitate nimiâ laborare videatur, eam integram insistendo vestigiis Archimedeis non gravamur separatim adjungere, ut eam legant & examinent qui superiora non sufficere existimabunt. Probandum est segmentum parabolicum E Q M I rectangulo sub datâ K L in curvam E X A æquale esse. Fiat ex Archimede segmentum illud parabolicum E Q M I æquale rectangulo sub datâ rectâ K L in datam rectam B. Si probaverimus rectam B æqualem esse curvæ E X A constabit propositum. Aio itaque rectam B curvæ E X A esse æqualem. Si enim æqualis non est, erit vel major vel minor. Sit primò recta B major quàm curva E X A & sit earum excessus, si fieri possit recta Δ. Ex propositione secundâ hujus possumus curuæ E X A circumscribere figuram ex portionibus tangentium compositam quæ superet curvam intervallo minore rectâ Δ. Fiat igitur illa circumscriptio & in figura separatâ, quam etiam quintam Romano charâctere notauimus, circumscripta illa constet ex portionibus tangentium ER, X S, Y T, Z V, circumscripta illa ex prædemonstratis est major curvâ E X A. Sed & recta B posita est major eâdem curva. Cum ergo circumscripta superet curvam minori intervallo quàm recta B superat eandem curvam: Ergo circumscripta minor est recta B. Rectangulum itaque sub rectâ K L in circumscriptam est minus rectangulo sub K L in rectam B. At rectangulum sub K L in B factum est æquale segmento parabolico E Q M I: Ergo rectangulum sub K L, in circumscriptam est minus dicto segmento parabolico E Q M I. Probavimus autem rectangulum sub K L in portionem tangentis E R æquari rectangulo sub Q E in E F, item rectangulum sub K L in X S æquari rectangulo sub P F in F G, item rectangulum sub K L in Y T æquari rectangulo sub O G in G H, denique rectangulum sub K L in Z V æquari rectangulo sub N H in H I, ergo rectangulum sub K L in totam circumscriptam est æquale summæ rectangulorum sub Q E in E F, sub P F in F G, sub O G in G H & sub N H, in H I. Si autem in rectas F P, G O, H N, I M, quæ sensim decrescunt quò propiùs accedunt ad verticem parabolæ, continuatas demittantur

perpendiculares seu parallelæ basi, à punctis Q, P, O, N rectæ Q Γ, P Θ, O Λ, N Φ. Patet rectangulum Q E F Γ æquale esse rectangulo sub Q E in E F, item rectangulum Θ F, æquari rectangulo sub P F in F G, rectangulum Λ G æquari rectangulo sub O G in G H, denique rectangulum Φ H æquari rectangulo sub N H in H I. Ergo rectangulum sub K L in circumscriptam est æquale rectangulis Θ E, Θ F, Λ G, Φ H. Sed probavimus rectangulum sub K L in circumscriptam esse minus segmento parabolico E Q M I, ergo summa rectangulorum Γ E, Θ F, Λ G, Φ H erit minor dicto segmento parabolico E Q M I, quod est absurdum, illa enim rectangula constituunt figuram ex rectangulis compositam, & segmento parabolico, ut patet, circumscriptam, ideóque ipso segmento majorem. Recta itaque B non est major curvâ E X A. Sed neque minorem esse probabimus. Sit enim recta B minor curvâ E X A, si fieri potest, & curva superet rectam B intervallo Δ. Circumscribatur in figurâ separatâ (quam etiam quintam charactere græco notavimus) figura constans ex portionibus tangentium curvâ E X A minorum; sed quam tamen ipsa curva superet intervallo minore ipso Δ. Et sit illa figura constans ex portionibus tangentium X R, Y S, Z T, A V; Cum itaque curva sit major B intervallo Δ, & eadem curva superet circumscriptam intervallo minore ipso Δ, ergo circumscripta erit major rectâ B, ideoque rectangulum sub K L in circumscriptam erit majus segmento parabolico E Q M I. Sed rectangulum sub K L in circumscriptam æquatur, ex prædemonstratis, rectangulis sub P F, in F E, sub O G, in G F, sub N H in H G & sub M I in I H. Est enim ut X R ad F E ita F P ad K L, ideòque rectangulum sub K L in X R æquatur rectangulo sub P F in F E & sic de reliquis. Cum igitur rectangulum sub K L in circumscriptam sit majus segmento parabolico E Q M I, ergo summa rectangulorum sub P F in F E, sub O G in G F, sub N H in G H & sub M I in H I est major dicto segmento parabolico, sed omnia illa rectangula ductis perpendicularibus seu basi parallelis rectis P Γ, O Θ, N Λ, M Φ quæ omnes cadent in applicatas intra parabolam, prout enim applicatæ magis distant à vertice eò magis semper augentur, erunt æqualia rectangulis P E, O F, N G, M H. Ergo summa omnium illorum rectangulorum P E, O F, N G, M H, erit major segmento parabolico. Quod est absurdum. Rectangula enim illa P E, O F, N G, M H componunt figuram ex rectangulis compositam & ipsi segmento parabolico inscriptam, ideòque ipso minorem. Recta itaque B non est minor curvâ E X A. Cum igitur nec sit major, nec minor, erit ipsi curvæ æqualis. Quod prolixiùs, ut omnis removeatur scrupulus, fuit demonstrandum.

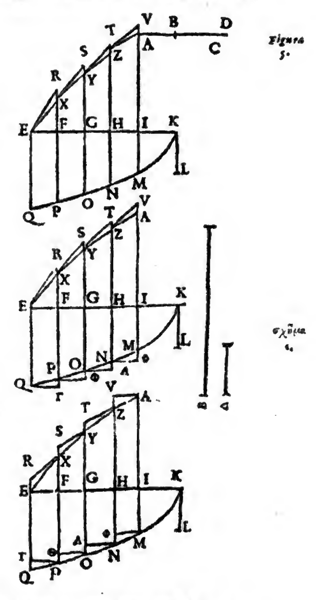


Figura 5.

σχῆμα 5.

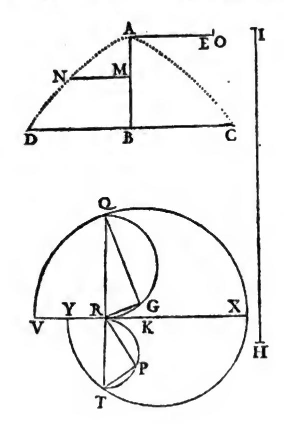
Ex jam demonstratis patet eâdem facilitate demonstrari posse segmentum parabolicum quodvis E Q P F à priore abscissum, rectangulo sub datâ K L in curvam E X

M 4

æquale esse; Ideóque si detur in basi quodvis punctum ut F, cum ex Archimede segmentum parabolicum E Q P F in rectilineis detur, dari etiam & rectangulum sub K L datâ in portionem curvæ E X; datur autem recta K L, ergo & curva E X. Dato itaque quovis puncto inba se ut F, dari portionem curvæ ipsi oppositam & rectam posse assignari huic æqualem manifestum est.

Nec moveat ad rectam illam curvæ E X A æqualem inveniendam, construendam videri parabolam simplicem, quo casu problema solidum evaderet. Cùm enim supponatur ad veritatem tantum inquirendam & demonstrationem ritè conficiendam parabolæ illius descriptio; nihil vetat quominus calculum ipsum dissimulatâ illa imaginaria parabolæ descriptione, per rectas & circulos & expediamus & exhibeamus. Is autem calculus, nisi fallor, talis est. Esto in figurâ sexta, curva parabolica D A C

Figura 6.



ejus naturæ ut cubi applicatarum D B & N M sint inter se ut quadrata portionum axis B A & A M, dentur autem altitudo A B & semibasis B D, aut tota D B C. Aio dari rectam curvæ D A C æqualem (quod jam probatum est) in calculo verè Geometrico. Sit rectum istius parabolæ latus recta A O, quam datam esse ex datis axe & applicata ex suprà dictis constat, à recta A O auferatur nona ipsius pars E O, reliqua verò A E fiat æqualis rectæ Y K, cui in directum ponatur K X æqualis seu applicatæ semibasi D B. Super recta Y X tanquam diametro describatur semicirculus Y T X & rectâ Y K bisectâ in puncto R excitetur perpendicularis R T semicirculum secans in T, Rectæ R T fiat æqualis recta R V & super recta V X tanquam diametro describatur semicirculus V Q X ad cujus circumferentiam à puncto R excitetur perpendicularis R Q. Super rectis T R, R Q describantur semicirculi T P R, R G Q & ipsis applicentur rectæ T P, R G quæ singulæ sint ipsi R Y æquales. Junctis autem rectis R P, Q G: Aio rationem curvæ parabolicæ D A C ad basim D B C esse camdem quæ est dupli quadrati rectæ Q G ad triplum quadratum rectæ R P ideoque esse datam. Fiat itaque ut triplum quadratum rectæ R P ad duplum quadratum rectæ Q G ita recta D C

ad

ad rectam I H. Recta illa I H quæ data est ex constructione, æqualis erit curvæ parabolicæ DAC. Quod si cum præcedente demonstratione non conveniat, ab ipsa erit emendandum.

Si hæc non sufficiant ad obtinendum à Geometris ut nostra hæc curva parabolica inter admiranda Geometriæ collocetur, illud fortasse ab ipsis quæ mox sequentur impetrabunt. Quid enim mirabilius quàm ex unâ hâc curvâ derivari & formari alias numero infinitas non solum ab ipsâ sed inter se specie differentes quæ tamen singulæ rectis datis æquales esse demonstrentur? Propositio generalis hæc est.

Sit in 7. Figurâ, curva nostra parabolica C M A cujus altitudo A B, semibasis C B

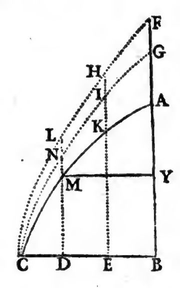


Figura 7.

& ab eâ curvâ formentur aliæ in infinitum hac ratione ut ductis perpendicularibus ad basim rectis D M, N L, E K, I H utcumque, secantibus curvam in punctis M, K, nova curva C N I G ex hac priore formanda sit cjus naturæ ut recta D N sit semper æqualis portioni prioris curvæ nempe C M ipsam respicienti; item recta E I sit æqualis portioni prioris curvæ C M K, & sic in omnibus alijs quibuslibet perpendicularibus. Hæc nova curva C N I G erit diversæ à priore speciei. Formetur pariter ab ipsâ, tertia curva C L H F in qua rectæ D L, E H sint semper æquales portionibus curvis C N & C N I secundæ curvæ. Et à tertiâ pari ratione formetur 4. à quarta quinta, à quinta sexta & eo progrediamur in infinitum ordine. Aio omnes istas curvas C N I G, C L H F & reliquas in infinitum perinde ac primam parabolicam C M K A rectis datis æquales esse.

Notandum autem istas omnes in infinitum curvas esse purè Geometricas, nec in illis itaque ad legem illam & ordinem naturæ de quibus initio hujus dissertationis locuti sumus recurrendum. Licet enim rectæ D N & E I curvis C M & C M K supponantur æquales, cædem tamen ipsæ non tam suppositæ sunt quàm ex prædictis demonstratæ esse pariter rectis æquales. Dato quippe quolibet puncto D, cum ex præcedentibus detur recta æqualis portioni curvæ C M; ergo recta D N quæ curvæ C M ex constructione ponitur æqualis, ut recta verè data non ut æqualis curvæ considerari debet, & sic de reliquis. Curva igitur suprà descripta C N I G verè Geometrica est, quam postquam æqualem esse rectæ datæ demonstraverimus sequetur tertiam curvam ab eâ formandam nempe C L H F esse quoque purè Geometricam & sic omnes alias in infinitum.

Demonstratio difficilis non erit si prius præmiserimus generalem quæ huic operi omninò inservit propositionem.

PROPOSITIO VI.

ESto in Fig. 8. quælibet curva ejuſdem cum præcedentibus naturæ ONR, cujus vertex O, axis vel applicata OVI, eadem enim ſemper eſt demonſtratio, & ab eâ

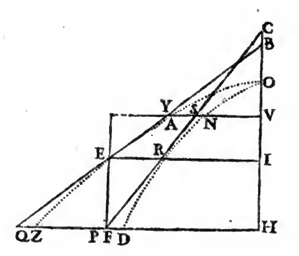


Figura 8.

formetur alia curva OAE cujus ea ſit proprietas ut applicatæ ſint æquales portionibus abſciſſis à priore curvâ, exempli gratiâ, applicata VA ſit æqualis curvæ ON, applicata IE ſit æqualis curvæ OR, & ſic de reliquis: Ad datum punctum in novâ hâc curvâ ducetur tangens hoc pacto: Sit datum punctum E, ducatur applicata EI, ſecans priorem curvam in R, ducatur recta RC tangens in dicto puncto R priorem curvam & occurrens axi in puncto C, fiat ut RC ad CI, ita recta IE ad rectam IB, & jungatur EB. Aio rectam EB tangere novam curvam EAO in puncto E. Sumpto enim quovis puncto in axe ut V, & ducta applicata VNA quæ ſecet priorem curvam in N, tangentem RC in S, ſecundam curvam in A, rectam verò EB in Y, ſi probaverimus rectam VY ſemper eſſe majorem applicatâ VA, recta EB non ſecabit novam curvam à parte verticis. Hoc autem facillimè probamus. Recta VA eſt æqualis curvæ ON ſive differentiæ inter curvas OR, NR: At recta RS eſt minor curvâ RN per conſectarium primæ propoſitionis, ergo differentia inter curvam OR & rectam RS eſt major differentia inter eamdem curuam OR, & curvam RN; ſed curva VY eſt æqualis differentiæ inter curvam OR & rectam RS ut mox probabimus ergo recta VY occurrens rectæ EB, erit major rectâ VA occurrente curvæ OAE, unde patet omnia puncta rectæ EB versùs verticem eſſe extra curuam; ideóque recta EB curvam ab eâ parte non ſecabit. Imò nec inferiùs. Sumatur enim quodvis punctum ut H à quo ducatur applicata HZ ſecans priorem curvam in D, tangentem RC productam in F, ſecundam curvam in Z, & rectam EB productam in Q. Si probemus rectam HQ in quocumque caſu majorem eſſe rectâ HZ, patebit omnia puncta rectæ EB etiam inferiùs ſumpta extra curvam jacere, unde patebit dictam rectam EB tangere ſecundam curvam in dicto puncto E. Recta HZ eſt æqualis ex conſtructione curvæ OD, hoc eſt ſummæ curvarum OR, RD. Cum autem recta RF ſit portio tangentis RE inferiùs ſumpta erit ex conſectario primæ hujus recta RF major curva RD, ideóque ſumma curvæ OR & rectæ RF erit major ſumma, ejuſdem curvæ OR & curuæ RD; ſumma autem curvæ OR & rectæ RF eſt æqualis, ut mox probabimus, rectæ HQ: ſumma verò curvarum OR, RD eſt æqualis rectæ HZ ex conſtructione, ergo recta HQ ſemper & in omni caſu major erit applicatâ HZ. Ideóque recta EB in dicto puncto E tanget ſecundam curvam. Probandum

autem reliquimus differentiam curvæ O R & rectæ R S æquari rectæ V Y, ducatur recta E M parallela axi & occurrat rectæ V Y productæ in M. Ex constructione est ut E I ad I B, ita R C ad C I, sed ut E I ad I B, ita Y V ad V B, & ita Y M, ad M E, ut autem R C ad C I, ita R S ad V I, ergo ut Y M ad M E, ita R S ad V I, Sunt autem rectæ M E, V I æquales propter parallelas, ergo rectæ Y M, R S erunt æquales. Sunt autem æquales etiam rectæ E I, V M, ergo differentia inter rectas E I, & M Y erit recta V Y. Sed recta E I ex constructione æquatur curvæ O R, ergo differentia inter curvam O R & rectam M Y sive ipsi æqualem R S æquabitur rectæ Y V. Quod primò erat probandum. Nec dissimili ratiocinio procedet demonstratio infrà applicatam E I, ductâ enim rectâ E P parallelâ axi, probabimus rectam Q P æqualem esse rectæ R F. Est enim ut E I ad I B hoc est Q H ad H B, hoc est, Q P ad P E, ita recta R C ad C I, hoc est, R F ad I H. Sunt autem æquales P E, I H, ergo & rectæ Q P, R F. Recta autem H Q æquatur rectis H P, P Q, quarum prior H P æquatur rectæ I E sive curvæ O R, posterior autem Q P æquatur ex demonstratis rectæ R F. Ergo summa curuæ O R & rectæ R F est æqualis rectæ H Q quod secundo loco fuit probandum. Patet itaque rectam E B in puncto E secundam curvam tangere. Quod erat demonstrandum.

Sit jam in 9. Fig. curva nostra parabolica G K A cujus altitudo A E, semibasis G E, rectum latus A D, cujus nona pars, ut suprà sit C D & recta A G bifariam secetur in

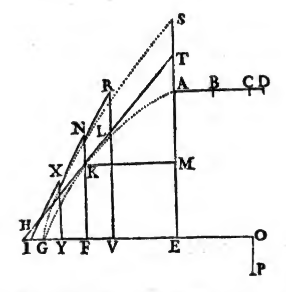


Figura 9.

B: A priori hac curvâ formetur alia versùs punctum G quæ sit G N S occurrens axi prioris in S, & novæ hujus curvæ proprietas hæc sit, ut sumpto quovis puncto ut F, & erectâ perpendiculari F K N occurrente duabus curvis in K & N, recta F N sit semper æqualis curvæ prioris portioni G K. Ducatur parallela basi K M, & ad idem punctum K ducatur recta T K H tangens priorem & occurrens axi in T & basi in H. Per punctum verò N in secundâ curvâ ducatur tangens R N X I occurrens basi in I, & à punctis quibuslibet in eâ ex utraque parte sumptis ut R & X demittantur in basim perpendiculares X Y & R V. Ex præcedentibus patet quadratum tangentis K T in priore curva ad quadratum F E, sive quadratum K L ad quadratum F V, esse semper ut rectam F E unâ cùm recta A B ad ipsam A B. Sed ut quadratum K T ad quadratum F E sive ad quadratum K M, ita quadratum K H ad quadratum H F propter parallelas, ergo quadratum K H est ad quadratum H F ut recta F E unâ cum A B ad A B. Ut autem quadratum K H, ad quadratum H F, ita ex præcedente propositione quadratum rectæ F N ad quadratum rectæ F I. (Cum enim cætera latera ex vi illius propositionis sint proportionalia, erunt proportionalia & quadrata.) Ergo quadratum N F ad quadratum

F I est ut recta F E unâ cum AB ad A B, & componendo quadrata duo N F & F I sive unicum quadratum N I erit ad quadratum F I ut F E unà cum A B bis ad A B. Sed ut quadratum N I ad quadratum F I, ita quadratum R N ad quadratum rectæ F V ex una parte, & ita quadratum rectæ N X ad quadratum rectæ F Y ex altera. Ergo sumpto quovis puncto in secunda hac curva ut N, est semper ut quadratum portionis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ, ita summa rectæ F E unà cum A B bis ad A B. Si igitur basi G E ponatur in directum recta E O rectæ A B dupla, & ad punctum O erigatur perpendicularis O P ipsi A B æqualis, erit semper ut quadratum portionis N R in hâc secundâ curvâ ad quadratum portionis basis F V, vel ut quadratum portionis tangentis N X ad quadratum portionis basis F Y, ita recta F O ad rectam O P.

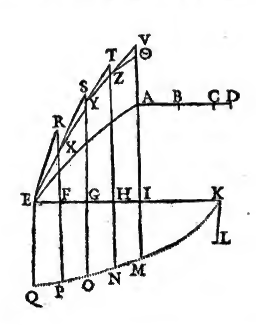
His ita se habentibus, patet cæteras in infinitum curvas modo quem supra indicavimus describendas ejus esse naturæ, ut in 3. v. g. quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ, sit ut portio basis F E initium sumens à puncto F in quod cadit perpendicularis à puncto contactus in basim demissa, unâ cum rectâ A B ter sumptâ ad ipsam A B. In quartâ curvâ erit ut quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis basis ipsi oppositæ ut recta F E unà cum A B quater sumpta ad ipsam A B. Et sic de reliquis in infinitum. Eadem enim semper demonstratio, ut evidens est, in omnibus casibus locum habet.

Nec difficilis hoc supposito ad theorema generale erit aditus.

PROPOSITIO VII.

ESto in Fig. 10. curva nostra parabolica E A, cujus axis A I, semibasis I E. ab eâ formetur secunda curva E X Y Z Θ cujus ea sit natura, ut suprà diximus, ut

Figura 10.



quævis applicata F X sit æqualis portioni prioris curvæ ab applicata illa, seu mavis vocare perdendicularem, abscissæ. Dividatur basis in quotlibet partes æquales E F, F G, G H, H I & ducantur à punctis F, G, H, perpendiculares secantes novam hanc secundam curvam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curvæ rectum latus A D, à quo abscindatur nona pars C D, & reliqua A C bisecetur in B. Rectæ A B bis sumptæ fiat æqualis recta I K quæ sit in directum basi, & ad punctum K erigatur perpendicularis K L æqualis rectæ A B. Per punctum K & axem K E intelligatur describi parabola sim-

plex sivè Archimedea cujus rectum latus K L & sit illa parabola K M O Q. A punctis E, F, G, H, I ducantur perpendiculares ad axem & occurrentes huic parabolæ in punctis Q, P, O, N, M, Ex corollario præcedentis cum curva E X Θ sit secunda curva à priore derivata seu formata eâ ratione quam jam sæpiùs explicuimus; sequitur sumpto in ea quolibet puncto ut Y, & ducta portione tangentis Y T esse ut quadratum Y T ad quadratum G H, ita rectam K G ad rectam K L: sed ut recta G K ad rectam K L, ita singulis in rectam K L ductis rectangulum G K L ad quadratum K L: Ex natura autem parabolæ simplicis rectangulum G K L æquatur quadrato applicatæ G O; ergo quadratum YT est ad quadratum GH ut quadratum G O ad quadratum KL, ideóque ut recta YT ad rectam G H ita recta G O ad rectam K L: rectangulum itaque sub extremis æquatur rectangulo sub mediis, rectangulum ergo sub G O, in G H æquatur rectangulo sub K L in Y T, Si igitur ducantur aliæ tangentes E R, X S & Z V occurrentes perpendicularibus in punctis R, S, V probabitur similiter rectangulum sub Q E in E F æquari rectangulo sub K L in E R, item rectangulum sub P F in F G æquari rectangulo sub K L in X S & sic de reliquis in infinitum, unde tandem per abductionem ad methodum Archimedeam pari quod in 4. propositione hujus indicavimus artificio, conficietur & concludetur segmentum parabolicum E Q M I æquari rectangulo sub K L in secundam curvam E X Θ sicut & singula segmenta parabolica, E Q P F, verbi gratiâ, rectangulo sub K L in portionem curvæ E X, vel segmentum E Q O G rectangulo sub K L in portionem curvæ E X Y & sic in infinitum. Dantur autem in rectilineis hæc omnia segmenta parabolica ex vi quadraturæ parabolæ ab Archimede demonstratæ; & datur etiam recta K L. Ergo dantur tam tota secunda curva E X Θ, quàm ipsius portiones E X, E Y &c. per rectas perpendiculares ad puncta F G data abscissæ.

Ad tertiæ curvæ cum rectâ datâ æqualitatem, similis fiet constructio, nisi quod recta I K ponetur tripla rectæ A B. In 4. curvâ eadem I K ponetur quadrupla rectæ A B. Et tandem generalis inter omnes istas in infinitum curvas a priore derivandas ita statuetur ratio: erunt nempe singulæ inter se ut segmenta parabolica ejusdem parabolæ, & ejusdem altitudinis quæ à vertice parabolæ distabunt per rectum latus toties sumptum quot erunt in ordine curvæ inter se comparandæ.

Exempli g. sit in 11. Fig. curva nostra parabolica E M A. Cujus axis A F, semibasis E F, rectum latus A D, à quo dempta nona parte C D, reliqua A C bisecetur in B Et à prima illa curvâ formetur secunda E O S ejus naturæ ut sumpto quolibet puncto

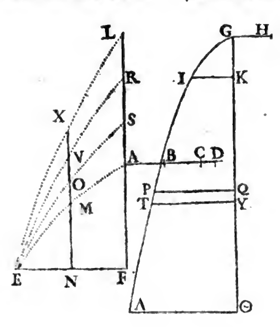


Figura 11.

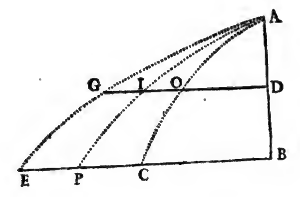
in base N recta N O perpendicularis ad basim & occurrens curvis in M & O, sit æqualis portioni prioris curvæ E M. à secunda formetur tertia E V R in qua recta N V sit æqualis portioni secundæ curvæ E O. Item à tertia E V R formetur quarta E X L, in qua recta N X sit æqualis portioni tertiæ curvæ E V. Exponatur separatim parabola simplex sive Archimedea cujus axis infinitus G K Q Y, vertex G, rectum latus G H æquale rectæ A B. Quæritur ratio verbi gratiâ 4. curvæ E X L ad primam E M A. Quia prior ex istis est 4. ordine, ab axe abscindenda est G Y quadrupla recti lateris G H, deinde ponenda ipsi in directum recta Y ϴ æqualis semibasi E F & ducendæ applicatæ rectæ Y T, ϴ Λ. Quia verò posterior ex duabus comparandis est prima ordine, abscindenda est ab axe recta G K recto lateri semel tantùm æqualis, deinde ipsi ponenda in directum recta K Q semibasi etiam E F æqualis & ducendæ applicatæ K I, Q P. Erit ex demonstratis & canone generali ab illis deducto, ut segmentum parabolicum Y T Λ ϴ ad segmentum parabolicum K I P Q, ita quarta curva E X L ad primam E M A. Sed ratio segmentorum parabolicorum inter se data est ex Archimede, ergo & ratio curvarum inter se data erit; data est autem prima ex demonstratis, datur igitur & quarta, & ipsi rectæ datæ æqualis assignari potest & perpetua illa ratio remota, si libeat, parabola ad phrasim Geometricam ope regulæ tantùm & circini accommodari. Quod autem de totis jam probatum & in canonem deductum est, idem de portionibus illarum curvarum inter se comparandis contingere beneficio segmentorum parabolicorum portiones semibasis ipsis curvarum portionibus oppositas pro altitudine habentium quis non videt?

Nihil autem nec de solidis ex dictis in infinitum curvis, conficiendis, nec de superficiebus ipsorum curvis, nèc de centris gravitatum aut linearum istarum, aut dictorum solidorum, aut superficierum curvarum adjungimus, cum methodi hac de re generales à summis & insignibus Geometris jam vulgatæ ista omnia post cognitam specificam curvæ datæ proprietatem ignorari non sinant, licet in multis casibus propriam ab unoquoque adjungi operi industriam non inutile futurum existimemus.

Sed antequam manum de tabula tollam succurrit examinanda sequens propositio.

Sit in Figura 12. curva nostra parabolica C O A, cujus vertex A, axis A B, semibasis C B. Ab ea formentur aliæ curvæ infinitæ modo quem jam explicuimus, non ex

Figura 12.



parte basis ut suprà, sed ex parte verticis. Sint illæ curvæ à prima effingendæ A I F, A G E &c. in infinitum eâ conditione ut sumpto quovis puncto in axe D & ducta ad axem perpendiculari D O I G secante curvas in punctis O, I, G, recta D I sit in

secunda curva semper æqualis portioni primæ curvæ A O, item recta D G in tertia curva sit semper æqualis portioni secundæ curvæ A I, & sic in infinitum. Hujusmodi omnes curvæ non solùm specie inter se & à prima A O C, different sed etiam ab ijs quas ex parte basis suprà effinximus. Quæritur ergo an curvæ illæ omnes A I F, A G E. &c. sic in infinitum effingendæ, datis rectis, an verò alijs curvis sint æquales ? Inquirant illud Geometræ, & miraculum augeri experientur.

Sanè si methodi quibus utuntur ad dimensionem curvarum, sint generales & sufficientes, quod ipsis affirmantibus in dubium revocare non ausim, primo statim obtutu rem factam habebunt, & a labore superfluo Geometram jam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in superioribus demonstrationibus concisum nimis invenerint, id aut suppleant, rogo, aut condonent.

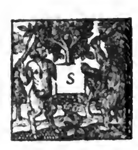




APPENDIX AD DISSERTATIONEM DE LINEARUM CURVARUM cum lineis rectis comparatione.

Vt ultimæ quam in Dissertatione proposuimus quæstioni satisfiat, præmittendæ videntur propositiones sequentes.

PROPOSITIO PRIMA.



INT in figurâ primâ duæ curvæ A I F, 3 Z 8 quarum axes A E, 37 sint inter se æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ in utrâque figurâ æquali à vertice intervallo distent. Sint exempli gratiâ applicatæ prioris B M, C I, D H, E F: posterioris verò applicatæ sint 4 t, 5 2, 6 9, 7 8, & sit recta A B quæ designat intervallum applicatæ B M à vertice, æqualis recta 43 quæ designat intervallum etiam applicatæ 4 t à vertice. Sit pariter C A æqualis 53. Item D A æqualis 63, denique E A, quod jam suppofueramus, æqualis 73 Si singulæ ex applicatis sint semper ad abscissas per tangentes ab axe, in ratione correlatarum, hoc est si ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M, ex unâ parte, & ad puncta 8, 9, Z, T, ex alterâ semper contingat ut applicata F E, verbi gratia, sit ad rectam K E quam tangens F K abscindit ab axe, in eadem ratione, quæ est applicatæ 8 7 ad rectam 7 2 quam tangens 82 ab axe pariter abscindit. Item applicata D H sit ad abscissam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H ut applicata 69 ad abscissam ab axe per tangentem ad punctum 9. ductam & sic de reliquis. Aio duas istas curvas A F, 3 z 8. esse inter se æquales, imò & similes ideóque easdem, & applicatas unius figuræ applicatis alterius quæ à vertice æqualiter distant esse pariter æquales. Ductis enim ad puncta H, I, ut in primâ figurâ portionibus tangentium HO. I N, M R, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R. Item ductis portionibus tangentium in secundâ figurâ 9 V, Z Y, T X quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X: ex suppositione ut F E ad E K in primâ figurâ, ita est 87 ad 7 2 in secundâ: sed anguli ad puncta E & 7 sunt recti, ergo triangula F E K, 8 7 2 sunt similia: ut ergo F K ad K E, ita 8 2 ad 72. Sed ut F K ad K E ita (productâ applicatâ D H ad punctum G) recta F G ad rectam D E, & ut 82 ad 72 ita (productâ applicata 69 ad punctum P) recta 8 P ad 67. Ergo ut recta F G ad rectam D E, ita recta 8 P ad 67. Sunt autem rectæ DF, 67

67, æquales, cùm rectæ E A & 73, item rectæ D A & 63 sint inter se æquales: ergo & portiones tangentium FG, 8 P erunt inter se æquales. Similiter probabimus portionem tangentis H O æqualem esse portioni tangentis 9 V, item portionem tangentis I N æqualem esse portioni tangentis Z Y, denique portionem tangentis M R æqualem esse portioni tangentis T X. Cum ergo series tangentium in primâ figurâ sit æqualis seriei tangentium in secundâ per abductionem ad impossibile more Archimedeo facilè concluditur curvam A I F, curvæ 3 Z 8 æqualem esse, quod primo loco fuit probandum, imò & pariter concluditur portiones curvæ correlatas esse inter se æquales, portionem nempè F H portioni 89, portionem curvæ H I portioni 9 Z, & sic de reliquis. Superest probandum applicatas pariter unius figuræ applicatis alterius esse æquales. Cum ex suppositione applicatæ sint semper ad abscissas ab axe per tangentes in eâdem utrobique ratione, ergo anguli G F E, P 8 7 qui fiunt ab intersectione tangentium & applicatarum erunt inter se æquales: Item anguli O H D, & V 9 6: Item anguli N I C, & Y Z 5: Denique anguli R M B, & X T 4. Cum ergo portiones omnes prioris curvæ F H, H I, I M, M A, sint æquales portionibus posterioris 8 9, 9 Z, Z T, T 3 singulæ singulis, imò & earumdem portionum sit eadem utrobique inclinatio (inclinationem enim curvarum metiuntur tangentes quæ in utrâque figurâ æquales semper, ut probavimus, conficiunt angulos) ergo curvæ A M I H F, 3 T Z 9 8, non solùm sunt inter se æquales, sed etiam similes: Undè si intelligantr altera alteri superponi, congruent omninò, ideòque non solùm axes sed applicatas æquales aut easdem potius habebunt. Quod secundo loco fuit demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Sint duæ in secundâ figurâ parabolæ ejusdem naturæ A O D, X I G, quarum axes sint A C, X F, semibases D C, G F, & sit verbi gratia ut cubus D C ad cubum applicatæ B O, ita quadratum C A ad quadratum B A: & similiter ut cubus G F ad cubum applicatæ I Y, ita quadratum F X ad quadratum I X. (Licèt enim propositio sit generalis à parabolâ nostrâ non discedimus) sit autem ut axis unius ad semibasem, ita etiam axis alterius ad semibasem nempè ut axis C A ad semibasem D C, ita axis X F ad semibasem G F. Aio duas hasce parabolas esse inter se in ratione axium, vel semibasium, hoc est curvam A O D esse ad curvam X I G ut est axis A C ad axem X F, vel ut semibasis C D ad semibasem G F. Hæ quippe duæ rationes ex suppositione sunt eædem. Demonstratio est in promptu. Secetur enim uterque axis in quotlibet partes æquales, duas tantùm ad vitandam confusionem & prolixitatem assumemus. Secetur ergo bifariam axis A C, in B, & axis F X in Y, & ductis applicatis B O, Y I ducantur ad puncta D, O, tangentes DN, OM quarum prior occurrat applicatæ BO in puncto E, posterior verò rectæ A V applicatis parallelæ in puncto V. Item in altera figura ducantur ad puncta G, I, tangentes G K, I S, occurrentes applicatæ Y I & ipsi parallelæ X R in punctis H, R: ex suppositione est ut D C ad C A, ita G F ad F X. Sed ex natura istius paraboles recta C A est ad C N abscissam per tangentem ut 2. ad 3. Item recta F X est etiam ad rectam F K per tangentem abscissam ut 2. ad 3. Ergo ex æquo est ut D C ad C N ita G F ad F K. Sunt ergo æquiangula triangula D N C, G K F. Ergo ut D N, ad N C, ita G K ad KF. Sed ut D N ad N C, ita D E ad C B, & ut G K ad K F, ita G H ad F Y. Ergo ut D E ad C B, ita G H ad F Y. Similiter probabitur esse ut O V ad B A, ita I R ad X Y. Cum ergo portiones axium A B, B C ex una parte, & X Y, YF ex altera sint inter se æquales, ergo ut omnes tangentium portiones D E, O V ad totum axem A C, ita omnes tangentium portiones G H, I R ad totum axem X F. Omnes autem portiones tangentium D E, & O V & plures, si opus sit, beneficio abductionis ad impossibile ut iam sæpiùs & indicatum & probatum est designant totam curvam D O A: Item omnes portiones tangentium G H, I R & plures etiam, si opus

Figura 2.

sit, designant totam curvam G I X. Ergo ut curva D O A ad axem A C, ita curva G I X ad axem X F: Et vicissim & convertendo, erit axis A C ad axem X F: sive basis D C ex suppositione ad basim G F, ut curva D O A ad curvam G I X. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Figura 3.

ESto in 3. Figura curva AO cujus axis AC, basis CO, & ab ea intelligatur formari alia curva ejusdem & axis & verticis in quâ applicatæ sint semper in ratione applicatarum prioris curvæ, sit nempè ut basis C O, ad basim C V, ita applicata B P prioris curvæ, ad applicatam B R posterioris curvæ, & ita applicata D E ad applicatam D N & sic in infinitum. Si ad punctum quodlibet prioris curvæ ut O ducatur tangens O H cum axe conveniens in puncto H, & continuetur C O, donec occurrat secundæ curvæ in V. Aio rectam quæ puncta V & H conjungit tangere secundam curvam, & semper contingere ut tangentes correlatæ in utraque curva ad idem punctum axi occurrant. Ducantur enim applicatæ B P R, D E N, occurrentes curvis in punctis P, R, E, N, & rectis O H, V H productis, in punctis Q, S, F, M. Si probaverimus rectam B S supra rectam CV ductam semper majorem esse rectâ B R: item rectam D M inferiùs ductam esse etiam semper majorem applicatâ D N, patebit rectam M V S H tangere secundam curvam in puncto V. Ex constructione ut C O ad C V, ita est applicata B P ad applicatam B R. Sed propter parallelas C O V, B Q S quæ secantur à tribus rectis C H, O H, V H ad idem punctum vergentibus, est etiam ut C O ad C V ita recta B Q ad rectam B S, ergo ut recta B P ad rectam B R, ita est recta B Q ad rectam B S, & vicissim ut recta B P ad rectam B Q, ita est recta B R ad rectam B S. Cùm autem recta O Q H tangat priorem curvam in puncto O, recta B Q erit major recta B P, ergo etiam recta B S erit major recta B R. Quod primo loco fuit probandum. Nec dissimilis in applicata inferiùs sumpta erit demonstratio. Ex suppositione enim est ut C O ad C V, ita D E ad D N, & propter parallelas est etiam ut C O ad C V, ita D F ad D M, ergo ut D E ad D N ita est D F ad D M; est autem D E minor D F, ergo & D N ipsa D M minor erit. Recta itaque M V S H in puncto V tangit secundam curvam.

Lemma ad id quod sequitur.

Figura 4.

SIT in 4. figura, parabole nostra G I A cujus axis A E, semibasis E F G tangens G H. Constituatur ad eumdem axem A E alia parabole ejusdem naturæ F N A cujus semibasis E F sit potestate subdupla prioris semibasis E G, & semper contingat applicatam quamvis, ut N O, applicatæ O I ad priorem curvam esse pariter potestate subduplam, Sit rectum prioris G I A paraboles latus recta A D, cujus nona pars sit C D, & reliqua A C bisecetur in B. Ducatur ad secundam parabolen tangens ad punctum F recta F H. quæ in eodem puncto H cum axe conveniet non solùm ex vi propositionis præcedentis, sed quia ex natura istarum parabolarum, in utraque, recta E A est ad rectam E H ut 2 ad 3. ex superiùs demonstratis. Aio quadratum F E esse ad quadratum E H ut est dimidia rectæ A B ad rectam E G. Jam enim in propositione tertiæ dissertationis demonstratum est quadratum G E esse ad quadratum E H ut est recta A B ad rectam E G. Ergo sumptis antecedentium dimidiis erit ut quadratum E F quod supposuimus esse dimidium quadrati G E, ad quadratum E H, ita dimidia rectæ A B ad rectam G E. Probabimus pariter si recta F E sit potestate subtripla rectæ G E, hoc est si quadratum F E sit subtriplum quadrati G E, esse ut quadratum F E ad quadratum E H, ita tertiam partem rectæ A B ad rectam G E. Et sic de subquadruplo subquintuplo & reliquis in infinitum. Cum autem in ratione subdupla probaverimus esse ut quadratum E F ad quadratum E H ita dimidiam A B ad rectam G E,

ergo componendo erit ut summa quadratorum F E, E H, sive ut unicum quadratum F H ad quadratum E H, ita dimidia A B unà cum G E, ad ipsam G E.

Si verò recta E F sit potestate subtripla rectæ G E, erit ut quadratum F H ad quadratum E H, ita tertia pars A B unà cum G E ad ipsam G E.

Si recta E F sit potestate subquadrupla rectæ G E, erit ut quadratum F H ad quadratum E H, ita quarta pars A B unà cum E G ad ipsam E G, & sic in infinitum, & in quacumque applicata idem continget.

PROPOSITIO IV.

HIS præmissis theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit in figura 5. parabole nostra A C cujus axis A B, semibasis B C, & ab ea formentur aliæ in infinitum curvæ A D, A E, A F quarum ea sit proprietas ut ducta qualibet applicata B C D E F, recta B D sit semper æqualis priori curvæ C A, recta B E æqualis secundæ curvæ A D, recta B F æqualis tertiæ curvæ A E, idque semper in omnibus ad illas curvas applicatis contingat. Aio omnes illas & singulas in infinitum curvas A D, A E, A F &c. esse semper datis lineis rectis æquales, perinde ac curvas quas in dissertatione, diversa & dissimili ex parte basis methodo construximus. Figura 5.

Theorema generale ita se habet. Exponatur separatim eadem parabole O 3 M æqualis omninò & similis ipsi A C, cujus ideo axis M N æqualis est axi A B, & semibasis O N, semibasi B C. Separatim enim ad vitandam confusionem figuram construendam duximus. Fiat recta N P rectæ N M potestate dupla, recta N Q ejusdem N M potestate tripla, recta N R ejusdem N M potestate quadrupla, & sic in infinitum. Manente autem eadem semibasi O N, construatur parabole per vertices P, Q, R ejusdem cum parabola O 3 M vel A C naturæ, & sint illæ O 4 P, O 5 Q, O 6 R &c. Aio parabolam O 4 P curvæ A D esse æqualem; parabolam verò O 5 Q curvæ A E esse æqualem, denique parabolam O 6 R curvæ A F esse æqualem, & sic in infinitum. Cum in nostris parabolis O 4 P, O 5 Q, O 6 R ducta applicata 2 3 4 5 6, sit semper ex natura dictarum parabolarum ut cubus rectæ O N ad cubum rectæ 4 2 ita quadratum rectæ sive axis N P ad quadratum P 2: item ut cubus O N ad cubum 5 2 ita quadratum N Q ad quadratum Q 2: denique ut cubus O N ad cubum 6 2 ita quadratum N R ad quadratum R 2. Patet ex prædemonstratis in dissertatione, singulas ex istis parabolis, rectis datis æquales esse, ergo post demonstrationem theorematis nostri generalis constabit singulas quoque ex curvis A D, A E, A F rectis datis æquales esse. Figura 6.

Demonstratio autem theorematis generalis hæc est. Sit rectum paraboles istius latus recta A S, à qua si demas nonam partem S Y, reliquam biseca in puncto V & ad puncta C, D, E ducantur tangentes ad novas curvas C I, D H, E G quæ occurrant axi in punctis I, H, G. Ex demonstratis in tertia dissertationis propositione quadratum B C est ad quadratum BI ut recta A V ad rectam B C. Et componendo quadratum C I est ad quadratum B I ut recta A V unà cum B C ad B C. Sed ex propositione sexta Dissertationis, ut est quadratum tangentis C I ad quadratum B I, ita quadratum rectæ B D se habet ad quadratum rectæ B H, quam abscindit tangens D H: Ergo ut quadratum B D ad quadratum B H, ita recta A V una cum B C ad B C: Et componendo ut quadratum tangentis D H ad quadratum B H, ita recta A V unà cum B C bis sumptâ ad ipsam B C. Sed ut quadratum tangentis D H, ad quadratum H B, ita ex eadem dissertationis propositione quadratum B E est ad quadratum rectæ B G à tangente E G abscissæ: ergo ut quadratum rectæ B E ad quadratum rectæ B G, ita est recta A V unà cum B C bis sumpta, ad ipsam B C. Similiter probabitur si ducatur ad curvam E A applicata Z T K, secans curvam AC in T, & intelligatur ad punctum K duci, tangens ad curvam AKE, esse pariter ut quadratum KZ ad quadratum rectæ, quam

tangens per punctum K ducta ab axe abscindit, ita rectam A V unà cum Z T bis sumpta ad ipsam Z T. Et sic semper continget.

Exponatur separatim ad vitandam confusionem eadem curva A K E, quæ sit in figura separata Β Φ Λ. Basis Λ Δ sit itaque æqualis basi E B, tangens Λ Γ tangenti E G, axis Δ Β axi B A; abscissa per tangentem ab axe Δ Γ, abscissæ B G; applicata Ν Φ, applicatæ Z K. A B hac curva Λ Φ Β formetur alia ipsa minor Θ Π Β, ea conditione ut applicatæ novæ istius curvæ sint semper subduplæ potestate applicatarum prioris, verbi gratiâ recta Δ Θ sit subdupla potestate rectæ Δ Λ, item applicata Ν Π sit subdupla potestate rectæ Ν Φ; & sic de reliquis. Ducantur in hac nova curva tangentes ad puncta Θ, Π rectæ Θ Γ, Π 7. Ex præcedente tertia propositione patet tangentes Θ Γ, Λ Γ, ad idem punctum Γ cum axe concurrere. Item tangentes ad puncta Φ, Π ductas ad idem etiam punctum, verbi gratiâ, 7 cum axe concurrere, cùm applicatæ utriusque figuræ sint in eadem semper inter se ratione.

Exponatur adhuc separatim parabole ejusdem cum parabolis O M, O P &c. naturæ, cujus axi 9 8 sit æqualis axi M N, sive AB sive Β Δ; semibasis autem 8 X sit subdupla potestate semibaseos N O, sive B C. Et sit illa X 11 9, à qua formetur alia 9 12 Ψ, cujus idem sit axis 9 8, applicata verò 8 Ψ sit æqualis curvæ X 11 9: item applicata 10 11 12 sit æqualis curvæ 11 9; & sic de reliquis.

Probandum primò curvas Θ Π Β & Ψ 12 9, esse easdem, hoc est omninò æquales, & similes. Quod sic demonstrabitur. Probavimus quadratum B E esse ad quadratum B G, sive quadratum Λ Δ ad quadratum Δ Γ, ut rectam A V unà cum C B bis sumpta ad rectam C B: Ergo sumptis antecedentium dimidiis, cum posuerimus rectam Θ Δ esse potestate subduplam rectæ Δ Λ, quadratum rectæ Θ Δ erit dimidium quadrati Λ Δ, ideóque ut quadratum Θ Δ ad quadratum Δ Γ, ita dimidia A V unà cum C B erit ad ipsam C B. Similiter probabimus in alia qualibet applicâta ut Π Ν, esse quadratum Π Ν ad quadratum Ν 7 ut dimidiam A V unà cum Z T ad ipsam Z T; & sic de reliquis. Disquirendum jam an eadem proprietas curvæ Ψ 12 9 conveniat: quod ita fiet. In curva X 11 9 cujus semibasis X 8 est potestate subdupla semibasis B C, & axis 8 9 æqualis axi A B, ex lemmate superiori ductis tangentibus ad puncta X, Ψ rectis X Ρ, Ψ Σ quadratum X 8 est ad quadratum 8 Ρ ut dimidia rectæ A V ad rectam C B (recta enim X 8 est potestate subdupla rectæ C B) Ergo componendo quadratum X Ρ est ad quadratum 8 Ρ, ut dimidia A V unà cum C B ad ipsam C B. Similiter si intelligatur recta 9 10 æqualis rectæ A Z, hoc est si puncta 10 & Z æqualiter à vertice distent, quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abscissæ ab axe, ut dimidia A V unà cum recta Z T ad ipsam Z T. Sed ut quadratum X Ρ ad quadratum 8 Ρ, ita ex propositione sexta dissertationis est quadratum applicatæ Ψ 8 ad quadratum à tangente abcissæ 8 Σ, & similiter ut quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ ad quadratum abcissæ ab axe, ita quadratum applicatæ 12 10 ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam: Ergo ut quadratum Ψ 8 ad quadratum 8 Σ, ita dimidia A V unà cum B C ad B C. Sed in alia figura probavimus quadratum applicatæ Θ Δ esse ad quadratum abscissæ à tangente Δ Γ, ut est dimidia A V unà cum B C ad C B. Ergo in duabus curvis Ψ 12 9, Θ Π Β erit ut Ψ 8 ad abscissam 8 Σ, ita applicata Θ Δ ad abscissam Δ Γ. Et in omnibus aliis punctis idem semper continget, & eodem modo probabimus, nempe applicatam, verbi gratiâ, 10 12. esse ad abscissam à tangente ad punctum 12 ducta, ut est Π Ν ad Ν 7, & sic de reliquis. Per primam itaque propositionem hujus appendicis cum curvæ 9 12 Ψ, Θ Π Β, habeant eumdem axem & applicatæ sint ad abscissas ab axe per tangentes, utrobique in eadem correlatarum ratione, illæ curvæ erunt inter se æquales, & ipsæ etiam ipsarum semibases, & omnes similiter applicatæ à vertice æquidistantes. Ex constructione autem semibasis Ψ 8 est æqualis curvæ X 11 9: Ergo curva X 11 9 est æqualis rectæ Θ Δ. Recta autem Θ Δ est potestate subdupla rectæ Δ Λ ex con-

structione: Ergo curva parabolica X 11 9 est potestate subdupla rectæ δλ: recta autem δλ est æqualis rectæ B E, & recta B E supposita est in constructione curvarum à primaria A C derivatarum æqualis esse curvæ A D: Ergo parabola X 11 9 est subdupla potestate curvæ A D. Sed eadem curva X 11 9 est subdupla potestate parabolæ O 4 P; basis enim X 8 est facta potestate subdupla baseos B C sive N O, & similiter axis 8 9 sive A B, sive N M est potestate subduplus axis N P: Cum ergo parabolæ O 4 P, X 11 9 sint ejusdem naturæ, & tam axis quàm basis parabolæ X 11 9 sint potestate subduplæ axis & basis parabolæ O 4 P: Ergo & ipsa parabola X 11 9 ex propositione secunda hujus appendicis erit subdupla parabolæ O 4 P. Cum ergo ut iam probavimus eadem parabola X 11 9 sit subdupla tam parabolæ O 4 P, quàm curvæ A D; curva A D, & ipsa parabola O 4 P erunt inter se æquales; quod erat demonstrandum. Nec dissimili ad probandum curvam A E æqualem esse parabolæ O 5 Q, utendum artificio.

Cum enim quadratum B E esse ad quadratum B G ut est recta A V unà cum B C bis sumpta ad ipsam B C, probatum fuerit; ergo componendo & ulteriùs progrediendo erit quadratum tangentis E G ad quadratum rectæ B G, ut recta A V unà cum B C ter sumpta ad ipsam B C. Est autem ex prædemonstratis in sexta propositione dissertationis ut quadratum E G ad quadratum B G, ita quadratum B F, ad quadratum abscissæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam: Ergo quadratum B F erit ad quadratum illius abscissæ ut est recta A V unà cum B C ter ad B C. In reliquis imitabimur omninò & sequemur vestigia demonstrationis præcedentis, nisi quod in figura separata postquàm ΛΔ fuerit facta æqualis ipsi, B F, recta Δδ fiet subtripla potestate ipsius B F vel ΔΛ; curva ΛΦΒ curvæ F A fiet æqualis; curva θπβ ejus erit naturæ ut omnes applicatæ sequantur rationem basium ΛΔ θδ. In alia autem figura separata in qua curvæ 9 11 X & 9 12 Ψ, recta 9 8 erit æqualis ut suprà, rectæ N M, vel A B, vel ΒΔ, basis verò 8 X fiet subtripla potestate basis O N vel C B. Et fiet X 11 9 parabola ejusdem cum parabolis C T A, vel O 3 M naturæ à qua cum formabitur curva Ψ 12 9 cujus applicatæ 8 Ψ, 10 12 sint, ut suprà, æquales curvis X 9, 11 9. Probabimus, ut suprà, curvam βπθ, & curvam 9 11 X esse inter se æquales, & similes, hoc est easdem. Unde concluditur bases ΘΔ, & Ψ 8 esse æquales, ideoque basem Ψ 8 sive curvam 9 11 X esse potestate subtriplam rectæ δλ, sive B F, sive curvæ A E. Est autem etiam ex prædemonstratis parabola X 11 9 subtripla potestate parabolæ O 5 Q; Ergo curva AE & parabola O 5 Q erunt inter se æquales. Eodem ratiocinio in ulterioribus casibus utemur, & generalem nostri theorematis veritatem evincemus.

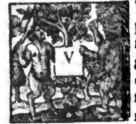
Qui autem superiorem dissertationem & hanc ad ipsam appendicem accuratiùs legerint, præcipua methodi nostræ fundamenta statim agnoscent, & ex eis deduci facillimam curvarum dimensionem deprehendent.



DE SOLUTIONE PROBLEMATUM Geometricorum per curvas simplicissimas, & unicuique problematum generi propriè convenientes.

DISSERTATIO TRIPERTITA.

PARS I.



T constet Cartesium in Geometricis etiam hominem esse, quod paradoxum meritò forsan quis dixerit, videant subtiliores Cartesiani an mendum contineat linearum curvarum in certas classes aut gradus Cartesiana distributio, & an probabilior & commodior secundùm veras analyseos Geometricæ leges debeat assignari. Quod sine dispendio famæ tanti & tam celebris viri executuros nos censemus, cum Cartesii & Cartesianorum omnium intersit veritatem cujus fautores se non immeritò jactant acerrimos, licèt ipsorum placitis aliquantisper adversetur, omnibus aut (si generale hoc nimis) Geometris saltem & Analystis fieri manifestam.

Problematum Geometricorum in certas classes distributio, non solùm veteribus, sed & recentioribus necessaria visa est Analystis. Proponatur videlicet A + D æquari B, aut A quadratum + B in A æquari Z plano. Hæ duæ æquationes quarum prior radicem aut latus ignotum suis terminis non excedit, posterior autem lateris ignoti secundam potestatem sive quadratum continet, primum & simplicius problematum genus constituunt. Ea verò sunt problemata quæ plana Geometris dici consueverunt. Secundum problematum genus illud est in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem, hoc est ad cubum vel ad quadratoquadratum pertingit. Ratio autem cur duæ potestates proximæ licèt diversi gradus sint, unum tamen tantùm constituant problematum genus, hæc est, quod æquationes quadraticæ reducuntur ad simplices aut laterales facili, quæ & veteribus & novis cognita est, methodo, ideoque per regulam & circinum nullo negotio resolvuntur. Æquationes autem quarti gradus sive quadratoquadraticæ reducuntur ad æquationes tertij gradus sive cubicas beneficio novæ, quam Vieta & Cartesius prodiderunt, methodi. Huic enim operi Vieta subtilem illam & sibi peculiarem climacticam paraplerosin destinavit, ut apud eum videre est cap. 6. libelli de emendatione æquationum, nec absimili in pari casu usus est artificio Cartesius, licèt aliis verbis illud enunciet.

Similiter quoque cubocubicam æquationem ad quadratocubicam sive æquatio-

nem sexti gradus ad æquationem quinti deprimet, licèt aliquanto difficiliùs, Vietæus aut Cartesianus Analysta. Ex eo autem quòd in prædictis casibus, in quibus una tantùm ignota quantitas invenitur æquationes graduum parium ad æquationes graduum imparium proximè minorum deprimuntur, idem omnino contingere in æquationibus in quibus duæ ignotæ quantitates reperiuntur confidenter pronunciavit Cartesius paginâ 323. Geometriæ linguâ Gallicâ ab ipso conscriptæ. Hujusmodi verò sunt æquationes omnes linearum curvarum constitutivæ, in his enim non solùm prædicta reductio vel depressio non succedet, ut Cartesius affirmabat, sed eam omnino impossibilem Analystæ experientur. Proponatur v. g. æquatio paraboles quadratoquadraticæ constitutiva in qua A quadratoquadratum æquatur Z solido in E, qua ratione æquatio hæc quarti gradus deprimetur ad tertium? quo utentur remedio climacticæ parapleroseos artifices?

Quantitatibus autem ignotis characteres vocalium juxta Vietam assignamus, hæc enim levia & prorsus arbitraria cur immutarit Cartesius non video.

Ut autem pateat disquisitionem hanc aut animadversionem non esse otiosam & inutilem, suppetit methodus universalis quâ problemata quæcumque ad certum curvarum gradum reducimus.

Proponatur namque problema in quo quantitas ignota ad tertiam vel ad quartam potestatem ascendat, illud per sectiones conicas quæ sunt secundi gradus expediemus; sed si æquatio ad quintam vel ad sextam potestatem ascendat, tunc solutionem per curvas tertij gradus possumus exhibere: si æquatio ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat, solutionem per curvas quarti gradus exhibebimus, & sic uniformi in infinitum methodo. Unde evidens fit non hic de nomine tantùm, sed de re agitari quæstionem. Proponatur in exemplum A cubocubus + B planosolidum in A æquari Z solido solido Aut, si velis, A quadratocubus + B planoplanum in A æquari Z plano solido, in utroque hoc casu problema solvemus per curvas tertij gradus seu cubicas, quod & fecit Cartesius. Sed si proponatur A quadratocubocubus + B planoplanosolidum in A æquari Z planosolido solido. Aut A quadratoquadratocubus + B solido solido in A æquari Z plano planosolido, tunc problema solvemus per curvas quarti gradus seu quadratoquadraticas quod nec fecit nec fieri posse existimavit Cartesius, cum in hoc casu ad curvas quinti vel sexti gradus necessariò recurrendum crediderit. Puriorem certe Geometriam offendit qui ad solutionem cujusvis problematis curvas compositas nimis & graduum elatiorum assumit, omissis propriis & simplicioribus, cum jam sæpe & à Pappo, & à recentioribus determinatum sit non leve in Geometria peccatum esse quando problema ex improprio solvitur genere. Quod ne accidat, corrigendus est Cartesius & singula problemata suis hoc est propriis & naturalibus sedibus restituenda: sed & pag. 322. idem Cartesius disertè asserit curvas ex intersectione regulæ & alterius aut rectæ aut curvæ oriundas esse semper elatioris gradus aut generis, quàm est recta aut curva in figura pag. 321. ex qua derivantur. Intelligatur, si placet in locum ipsius rectæ C N K in dicta figura pag. 321. substitui parabolam cubicam cujus vertex sit punctum K & axis indefinitus K L B A & cætera construantur ad mentem Cartesii. Patet æquationem dictæ parabolæ cubicæ constitutivam esse sequentem A cub. ex una parte, & B quad. in E ex altera. experiere autem statim curvam E C ex hujusmodi positione provenientem ad æquationem tantùm quadratoquadraticam ascendere, ergo curva quadratoquadratica est elatioris gradus aut generis, quàm curva cubica secundùm prædictam Cartesij definitionem, cum tamen contrarium pag. 323. expresse idem Cartesius definierit, curvam nempe quadratoquadraticam & curvam cubicam esse unius & ejusdem gradus aut generis. Methodum autem nostram qua omnia in infinitum problemata, ea nempe quorum æquationes tertiam & quartam potestatem

continent, ad secundum curvarum gradum : quæ quintam & sextam potestatem, ad tertium : quæ septimam & octavam, ad quartum reducimus, & eo in infinitum ordine exhibere non differemus quotiescumque id voluerint quibus piaculum videtur errores quoscumque vel etiam Cartesianos in præjudicium veritatis dissimulare.

Nec moveat problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt & quæ ejusdem cum problematis primi gradus sint speciei & plana dicuntur, circulis hoc est curvis secundi gradus indigere ; suum enim & proprium ; huic objectioni responsum non deerit cum methodum nostram generalem omnia omnino problemata per curvas convenientes absolventem proferemus.

DISSERTATIONIS

PARS II.

UT datæ publicè fidei satisfiat, methodum generalem ad solvenda quæcumque problemata per curvas proprias & convenientes exhibemus. Prædictum est jam in prima dissertationis parte problemata duorum graduum inter se proximorum 3^{i} verbi gratia & 4^{i}. 5^{i}. & 6^{i} 7^{i}. & 8^{i}. 9^{i}. & 10^{i}. &c. unicum tantùm curvarum gradum respicere, problemata nempe quæ ad tertiam vel quartam potestatem ascendunt, solvi per curvas 2^{i}. gradus : ea verò quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt solvi per curvas 3^{i}. gradus &c. in infinitum.

Modus autem operandi talis est. Data quævis æquatio in qua unica tantùm reperitur ignota quantitas reducatur 1°. ad gradum elatiorem sive parem : deinde ab adfectione sub latere omnino liberetur, quo peracto remanebit æquatio inter quantitatem cognitam vel homogeneum datum ex una parte, & aliquod homogeneum incognitum cujus singula membra à quadrato lateris incogniti adficientur ex una parte, ex altera homogeneum istud incognitum æquetur quadrato cujus latus effingendum eo artificio ut in æquatione ipsius quadrati cum homogeneo incognito elatiores quantum fieri poterit lateris ignoti gradus evanescant. Cavendum etiam ut singula lateris quadratici sic effingendi homogenea à radice vel latere ignoto adficiantur, & ultimum tandem ex illis à secundâ etiam radice incognita adficiatur. Orientur tandem beneficio divisionis simplicis ex una parte, & extractionis lateris quadrati ex altera, duæ æquationes linearum curvarum problemati dato convenientium constitutivæ, & earum intersectio solutionem problematis exhibebit ea qua dudum usi sumus in solutione problematum per locos methodo.

Exemplum proponatur, si placet, A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z. plan. in A quad. quad. + D solid. in A cub. + M. plan. plan. in A quad. æquari N. sol. sol. problemata quippe omnia quæ ad quintam vel ad sextam potestatem ascendunt ad hanc formam reduci possunt. Nihil enim hoc aliud est quàm vel quintam potestatem ad sextam evehere vel eam deinde ab ultima adfectione sub A vel latere liberare, quæ omnia & Vieta & Cartesius abundè docuerunt.

Effingatur itaque quadratum à latere A cub. + B in A in E & æquetur priori primum illius æquationis parti. Fiet itaque A cub. cub. + B in A qu. qu. in E bis + B qu. in A qu. in E qu. æquale A cub. cub. + B in A qu. cub. + Z pl. in A qu. qu. + D sol. in A cub. + M pl. pl. in A qu. & deleto utrinque A cub. cub. & reliquis per A qu. divisis quod ex cautione adjectâ methodo semper liberum est, remanebit æquatio inter B in A cub. + Z planum in A qu. + D sol. in A + M pl. pl. ex una parte, & B in A qu. in E bis + B qu. in E qu. ex altera. Hæc autem æquatio, ut patet, dat curvam 3^{i}. gradus.

Quia autem ut constituatur duplicata æqualitas & commodè ad solutionem problematis deveniatur, æquandum etiam est quadratum à latere A cub. + B in A in E posteriori

riori prioris æquationis parti, hoc est N sol. sol. ergo per extractionem lateris quadrati, latus quadratum N sol. sol. quod facilè datur & dicatur, si placet N sol. æquabitur A cub. + B in A in E, quod est latus quadrati prioris æquationis primum datæ parti æqualis. Habemus igitur hanc secundam æquationem inter sol. N & A cub. + B in A in E quæ dabit pariter curvam tertii gradus. Quis deinde non videt intersectionem duarum curvarum jam inventarum dare valorem ipsius A, hoc est problematis propositi solutionem?

Si problema ad septimam vel ad octavam potestatem ascendat statuetur primò sub forma octavæ potestatis, deinde ab adfectione sub latere omnino liberabitur hoc pacto. Esto itaque post legitimam ex jam præscripta methodo reductionem, A qu. cub. cub. + B in A qu. qu. cub. + D pl. in A cub. cub. + N sol. in A qu. cub. + M pl. pl. in A qu. qu. + G pl. sol. in A cub. + R sol. sol. in A qu. æquale Z pl. sol. sol.

Effingetur latus quadrati cuilibet istius æquationis parti æquandi à latere A qu. qu. + B $\frac{1}{2}$ in A cub. + D pl. in A in E.

Secundum autem hujus lateris quadratici homogeneum eo artificio effinximus ut duæ elatiores lateris vel radicis A potestates in æquatione omnino evanescant, quod perfacile est. Quadratum igitur illius lateris si æques priori æquationis propositæ parti, deletis communibus & reliquis per A qu. divisis, orietur æquatio curvæ 4^i. gradus constitutiva ex una parte.

Deinde post extractionem lateris quadrati ex altera æquationis primùm propositæ parte latus Z pl. sol. sol. quod P pl. pl. dicere licet, æquabitur A qu. qu. + B $\frac{1}{2}$ in A cub. + D pl. in A in E, hæc verò æquatio dabit etiam aliam 4^i. gradus curvam, & harum duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi solutionem.

Notandum porro in problematibus quæ ad nonam aut decimam potestatem ascendunt, ita effingendum latus quadrati ut in eo sint quatuor ad minus homogena quorum beneficio evanescant tres elatiores lateris ignoti gradus. In problematibus autem quæ ad undecimam aut duodecimam potestatem ascendunt latus effingendi quadrati constare debere quinque ad minus homogeneis, ita formandis ut eorum beneficio quatuor elatiores lateris ignoti gradus evanescant. Perpetuâ autem & facillimâ methodo, hæc lateris quadrati effingendi forma per solam & simplicem divisionem vel applicationem ut verbis geometricis & in re purè geometricâ utamur expediri Analystæ experiendo deprehendent, & characterum + & — variatio nullum methodo præjudicium est allatura.

Cum autem problemata quæ ad secundam potestatem ascendunt per extractionem lateris quadrati reducantur pura, ut notum est, per lineas primi gradus, hoc est rectas, expedientur, & vana evadet quam in priore dissertationis istius parte metueramus objectio cùm extractionem radicis quadratæ tanquam notam & obviam in quolibet problematum genere ex nostra methodo usurpandam supposuerimus.

Non latebit igitur deinceps accurata & simplicissima problematum Geometricorum per locos proprios a curvis variæ, prout expedit, speciei oriundos, resolutio & constructio. Variare autem curvas salvo semper & retento naturali problematis genere, liberum erit Analystis, & semper problemata 8^i. aut 7^i. gradus per curvas 4^i. problemata 10^i. aut 9^i. per curvas 5^i. problemata 12^i. & 11^i. per curvas 6^i. & sic uniformi in infinitum methodo expedientur. Cum contra per Cartesium problemata 8^i. aut 7^i. gradus curvis 5^i. aut 6^i. indigeant: problemata 10^i. aut 9^i. curvis 7^i. aut 8^i. problemata 12^i. aut 11^i. curvis 9^i. aut 10^i. & sic in infinitum, quod quàm longe à simplicitate & veritate geometricâ absit, videant ipsi Cartesiani, aut si ita visum fuerit, contradicant.

Veritatem enim tantùm inquirimus, & si in scriptis tanti viri alicubi delitescat, eam libenti statim animo & amplectemur & agnoscemus. Tanta me sanè, ut verbis alienis utar, hujus portentosissimi ingenii incessit admiratio, ut pluris faciam Cartesium errantem quam multos κατορθοῦντας.

DISSERTATIONIS
PARS III.

HÆc ad generalem Doctrinam fortasse sufficiant, quæ enim problemata Cartesius per gradus curvarum elatiores determinat expedienda, ea nos generali methodo ad curvarum gradum duplo minorem feliciter depressimus. Quod ita tamen intelligi debere pronunciamus, ut id saltem auxilium omnes omnino quæstiones admittant. Majus quippe infiniti casus speciales non recusant, juvat itaque ulterius expatiari & Analysin Cartesianam non solùm ad terminos duplo minores, sed ad quadruplo, sextuplo, decuplo, centuplo &c. in infinitum aliquando minores deprimere ut tantò magis error Cartesianus detegatur & proprium statim ab Analysi remedium consequatur: potestates autem per numeros ipsarum exponentes designare in gradibus elatioribus, deinceps commodiùs erit.

Proponatur invenire sex continuè proportionales inter duas datas. Sint duæ datæ B & D, prima inveniendarum ponatur A, fiet æquatio inter A^7 & B^6 D. Hæc æquatio secundùm Cartesium per curvas 5^i tantùm aut 6^i gradus solvi potest. Nos eam per curvas 4^i gradus in secundâ hujus dissertationis parte sicut reliquas etiam ejusdem naturæ generaliter resolvimus. Sed nihil vetat quominùs eam per curvas 3^i gradus resolvamus. Æquentur quippe singuli æquationis termini homogeneo sequenti A^4 E^2 D, æquabitur ex una parte A^7 & divisis omnibus per A^4 manebit D æquatio inter E^2 D & A^3 quæ dat, ut patet, curvam 3^i gradus. Ex altera verò parte A^4 E^2 D æquabitur B^6 D, & omnibus per D divisis & reliquis subquadraticè depressis, manebit æquatio inter A^2 E & B^3 quæ dabit etiam curvam 3^i gradus. Harum autem duarum curvarum intersectio dabit valorem A, hoc est problematis propositi per curvas 3^i gradus solutionem.

Sed proponatur inter duas datas invenire duodecim medias proportionales continuè, æquatio erit inter A^{13} & B^{12} D, eam autem Cartesius solvi tantùm per curvas 11^i. aut 12^i. gradus solvi posse existimavit. Nos generaliter ut similes quasvis ejusdem gradus eam in secunda hujus dissertationis parte per curvas 7^i gradus solvi posse docuimus. Sed ulteriùs inquirenti occurrit statim elegans per curvas 5^i gradus solutio, imò & datur per curvas 4^i, ut infra videre est: æquentur primùm singula hujus æquationis membra homogeneo A^8 E^4 D, ex una parte nempe A^{13}, & ex altera B^{12} D, in prima omnibus per A^8 divisis, fiet æquatio inter A^5 & E^4 D quæ dat curvam 5^i. gradus ut patet. In secunda omnibus per D divisis & per quartam potestatem sive quadratoquadratum depressis, remanebit æquatio inter A^2 E & B^3 quæ dat curvam 3^i gradus. Per duas itaque curvas quarum una est 5^i. gradus, altera 3^i. problema propositum expedimus.

Sed idem etiam problema faciliùs, hoc est, per curvas 4^i. gradus construere possumus; æquentur singula æquationis membra A^9 E^3 D fiet illinc post divisionem per A^9 A^4 æquale E^3 D, quæ æquatio dat curvam 4^i. gradus, istinc vero omnibus per D divisis, & deinde per tertiam potestatem sive cubum depressis fiet æquatio inter A^3 E & B^4 quæ dabit etiam curvam 4^i. gradus. Problema itaque per duas 4^i. gradus curvas facillimè construimus.

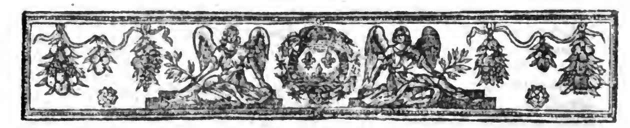
Qui hæc exempla viderit, non poterit dubitare quin inventio trigesima mediarum continuè proportionalium per curvas 7^i, imò & per curvas 6^i. possit expediri. Æquatio nempe inter A^3 & B^3 D communi termino A^{24} E^6 D æquabitur, unde problema per curvas 7^i. gradus expedietur, aut communi termino A^{25} E^5 D æquabitur, unde manabit solutio per curvas 6^i. gradus. Sic inventio 72 mediarum solvetur per curvas 9^i. gradus, & patet ex præmissis posse assignari rationem inter gradum problematis & gradum curvarum illud solventis omni datâ ratione majorem. Quod cum viderint Cartesiani, non dubito quin necessitati & admonitionis & emendationis nostræ subscribant. Advertendum autem

immutandam sæpe esse ipsam æquationis formam ut commodam per partes aliquotas divisionem homogenea ipsa recipiant, quod semel monuisse sufficiet. Proponatur videlicet inventio decem mediarum & sit æquatio inter A^{11} & $B^{10} D$, ducatur quodlibet ex homogeneis in rectam datam verb. grat. Z, ut sit æquatio inter $A^{11} Z$ & $B^{10} D Z$, ita enim ad numerum 12 pervenietur cujus ope facillima per partes aliquotas evadet reductio aut depressio, æquetur videlicet quodlibet ex homogeneis $A^8 E^4$ illinc orietur æquatio inter $A^3 Z$ & E^4 quæ dat curvam 4ª gradus. Istinc verò beneficio extractionis lateris quadratoquadratici inter $A^2 E$ & latus quadratoquadraticum homogenei dati $B^{10} D Z$, quod, si placet, sit N solidum, quæ æquatio dat curvam 3ª gradus, atque ita invenientur 10. mediæ per duas curvas quarum altera est 4^a. altera vero 3^a. gradus. Quod per levem illam prioris æquationis immutationem facillimè sumus executi. Nec moror infinita alia quæ Analystis ars ipsa abunde suppeditabit compendia; Hoc tantùm adjungo ea omnia quæ superiùs diximus non solum locum habere cum potestas ignota nullum aliud sub gradibus inferioribus adfectum continet homogeneum, sed etiam si aliqua ex homogeneis à gradibus potestati proximioribus adficiantur ut si $A^{13} + N A^{12} + M A^{11} + R A^{10}$ æquetur $B^{12} D$, solutio hujus quæstionis perinde facilis reddetur communi adsumpto æquationis homogeneo quo supra usi sumus, nempe $A^9 E^3 D$, ac si inveniendæ 12 mediæ inter duas datas proponerentur. Simili autem in æquationibus ab altioribus gradibus adfectis utemur artificio.

Notandum tamen in æquationibus in quibus una tantùm reperitur ignota quantitas ex una parte, exponentem potestatis illius puræ debere esse numerum primum ut ab eo gradus illius problematis designetur. Si enim exponens ille sit numerus compositus, problema ad gradus numerorum qui eum metiuntur statim devoluetur. Quærantur, exempli gratiâ, 8 mediæ continuè proportionales inter duas datas, fiet æquatio inter A^9 & $B^8 D$, quo casu cum numerus 9. sit compositus à numero 3. bis mensuratus, inferetur problema esse 3^a. gradus, quod quidem ita se habet, si enim inter duas datas reperiantur duæ mediæ, & rursus inter primam & secundam, secundam & tertiam, tertiam & quartam reperiantur similiter duæ mediæ, fient 8 mediæ inter duas primùm propositas lineas. Si quærantur 14. mediæ inter duas datas, æquatio quæ est inter A^{15} & $B^{14} D$ indicabit problema devolui ad alia duo problemata quorum unum est 3^a gradus, alterum 5^a. unde apparet exponentem puræ potestatis debere esse numerum primum ut verè gradum problematis exprimat & designet.

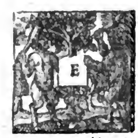
Cum autem numeros à binario quadraticè in se ductos & unitate auctos esse semper numeros primos apud me constet & jam dudum Analystis illius theorematis veritas fuerit significata, nempe esse primos 3. 5. 17. 257. 65537. &c. in infinitum, nullo negotio inde derivabitur methodus cujus beneficio problema construemus cujus gradus ad gradum curvarum ipsius solutioni inservientium rationem habeat datâ quavis majorem. Proponatur namque inter duas datas invenire 256 medias continuè proportionales fiet æquatio inter A^{257} & B^{256} & singuli termini æquabuntur sequenti $A^{240} E^{16} D$, & mox quæstio per curvas 17^a gradus expedietur, si quærantur mediæ 65536 quæstio per curvas 257 gradus solvetur, & sic in infinitum gradus majoris numeri deprimetur ad gradum numeri proximè minoris. Inter duos autem proximos rationem in infinitum augeri quis non videt? An ergo errasse Cartesium ulteriùs Cartesiani dissimulabunt, ego sanè ἐπέχω & quid statuendum hac de re sit sollicitus & tacitus expecto.

P 2.



PORISMATUM EUCLIDÆORUM

Renovata Doctrina, & sub formâ Isagoges recentioribus Geometris exhibita.



NUMERAVIT Pappus initio libri septimi libros veterum Geometrarum ad τόπον ἀναλυόμενον pertinentes :. qui omnes cùm temporis injuriâ perierint, exceptis unico datorum Euclidis libello & quatuor prioribus conicorum Apollonii, elaborandum Neotericis Geometris maximè fuit ut damnum operum, quæ tentavit edax abolere vetustas, aliquantisper resarcirent; & primò quidem subtilissimus ille, nec unquam satis laudatus Franciscus Vieta Apollonii περὶ ἐπαφῶν libros unico, quem Apollonium Gallum inscripsit, libello feliciter restituit; cujus exemplo se ad eamdem provinciam Marinus Ghetaldus, & VVillebrordus Snellius accingere non dubitarunt, nec defuit proposito eventus, libros enim Apollonii λόγου ἀποτομῆς, χωρίου ἀποτομῆς, διωρισμένης τομῆς & νεύσεων illorum beneficio vix amplius desideramus. Sequebantur loci plani, loci solidi, & loci ad superficiem. At huic quoque parti non ignoti nominis Geometræ succurrerunt: eorumque opera manuscripta licèt, & adhuc inedita latere non potuerunt. Sed supererat tandem intentata, ac velut desperata porismatum Euclidæorum doctrina. Eam quamvis opus artificiosissimum, ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum Pappus asserat, nec superioris nec recentioris ævi Geometræ vel de nomine cognoverunt, aut quid esset solummodò sunt suspicati. Nobis tamen in tantis tenebris dudum cæcutientibus, & quâ ratione in hac materiâ Geometriæ opitularemur elaborantibus, tandem se clara videndam obtulit, & purâ per noctem in luce refulsit; nec debuit inventi novantiqui specimen posteris invideri, postquam enim Suevicum sydus omnibus disciplinis illuxit, frustra scientiarum arcana tanquam mysteria quædam abscondamus, nihil quippe impervium perspicacissimo incomparabilis Reginæ ingenio, nec fas censemus occultare doctrinam quam vel unico duntaxat aut inspirantis, aut mandantis nutu, quandocunque libuerit, detectam iri vix possumus dubitare. Ut autem clariùs se prodat totum porismatum negotium, celebriores quasdam propositiones porismaticas selegimus easque Geometris & considerandas & examinandas confidenter exhibemus, ut mox quid sit Porisma & cui maximè inserviat usui innotescat.

Porifma primum.

Videatur figura porifmatis 1.

SInt duæ rectæ ON, OC, quæ angulum conftituant in puncto O & fint ipfæ pofitione datæ, dentur & puncta A & B, à punctis B & A ducantur rectæ BE, AF ipfi OC parallelæ & occurrentes rectæ NO productæ in punctis E & F, jungatur recta AE, quæ rectæ CO productæ occurrat in D, jungatur itidem recta FB, quæ eidem rectæ CO occurrat in C & ad quodvis punctum rectæ ON ut V, verbi gratiâ, inflectantur rectæ AV, BV, ita ut recta AV occurrat rectæ OC in puncto S recta autem BV eidem OC occurrat in puncto R, rectangulum fub CR in DS æquale femper erit rectangulo fub CO in OD, ideoque fpatio dato.

Porifma fecundum.

Videatur figura porifmatis 2.

EXponatur parabole quævis NAB, cujus diametri quælibet fint BEO, fumantur in curva duo quævis puncta A & N; à quibus inflectantur ad aliud quodvis curvæ punctum, ut D, Rectæ ADN, quæ in diametris puncta E, O, G, Q fignent, in eadem diametro abfcindentur femper duæ rectæ, quæ eamdem fervabunt rationem; erit nempe ut OB ad BE, ita, QB ad GB, idque in infinitum.

Porifma tertium.

Videatur figura porifmatis 3.

ESto circulus cujus diameter recta AD, Cui parallela utcunque ducatur NM; circulo in punctis N & M occurrens; & fint data puncta N & M, inflectatur utcunque recta NBM, quæ fecet diametrum in punctis O & V. Aio datam effe rationem rectanguli fub AO in DV, ad rectangulum fub AV in DO; ideoque fi inflectatur NCM fecans diametrum in punctis R S, erit femper ut rectangulum fub AN in DV ad rectangulum fub AV in DO, ita rectangulum fub AR in DS, ad rectangulum fub AS in DR, nec difficile eft propofitionem ad ellipfes, hyperbolas & oppofitas fectiones extendere.

Porifma quartum.

Videatur figura porifmatis 4.

EXponatur Circulus ICH cujus diameter IDH data, centrum D, radius ad diametrum normalis CD, fumantur in diametro producta puncta B & A data, & fint rectæ AI, BH æquales, fiat ut DI ad IA, ita I'L ad LI, & fit recta DR æqualis DL, dabuntur puncta R & L, jungatur recta CA cui æqualis ponatur AF ad diametrum perpendicularis, eidemque fiat BG æqualis & parallela, inflectatur quævis recta ad circulum à punctis F & G, ut FEG, quæ diametrum fecet in punctis M & N, Aio fummam duorum quadratorum RM, LN æquari femper eidem fpatio dato; iifdem pofitis in fecundo cafu jungatur recta CL cui æqualis ponatur LP ad diametrum perpendicularis, eidemque æqualis & parallela fiat RZ, fi à duobus punctis Z & P inflectatur quælibet ad circumferentiam recta ut PVZ fecans diametrum in punctis K & T quadratorum AT & BK aggregatum æquabitur femper alteri fpatio dato.

Porifma quintum.

Videatur figura porifmatis 5.

ESto circulus RAC, cujus diameter RDC data, centrum D, radius DA ad diametrum normalis, fumantur utcunque puncta Z & B data in diametro à centro D æquidiftantia, & juncta AZ fiat æqualis ZM ad diametrum perpendicularis eidemque æqualis, & parallela ducatur BO, inflectatur quævis ad circumferentiam recta MHO quæ diametrum in punctis E & N fecet, erit femper ratio quadratorum EH, HC, fimul fumptorum ad triangulum EHN data, eadem nempe quæ rectæ AZ ad quartam partem rectæ ZD. Ex adductis porifmatibus, quorum propofitiones elegantiffimas & pulcherrimas effe quis diffiteatur, haud difficulter indaganda fe prodit ipfa porifmatum natura.

Enunciari nempe poffefe, cundùm Pappum, vel ut theoremata vel ut problemata ftatim patet, nos fane ut theoremata enunciavimus, fed nihil vetat quominus in problemata transformentur; exempli causâ fic quintum porifma concipi poteft. Dato circulo RAC cujus diameter RC, quærantur duo puncta ut M & O, à quibus fi inflectatur quævis ad circumferentiam recta ut MHO faciat femper rationem quadratorum ab abfciffis EH, HC ad triangulum EHC datam; nec latet ex fupradicto theoremate conftructio, fi enim ponatur recta AZ effe ad quartam partem ZD in ratione datâ, omnia conftabunt, eâdemque ratione in reliquis & omnibus omnino porifmatibus theoremata in problemata facilè tranfibunt.

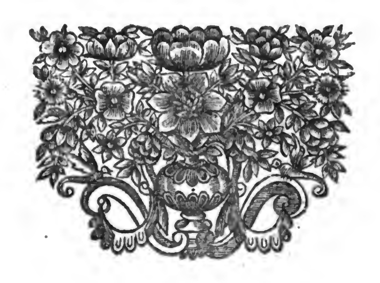
Quod autem innuit Pappus ex fententia Juniorum Geometrarum porifma deficere hypothefi à locali theoremate, id fanè totam porifmatis naturam fpecificè revelat neque alio ferè auxilio quàm eo quod hæc verba fubminiftrarunt hujufce abdita materiæ penetravimus.

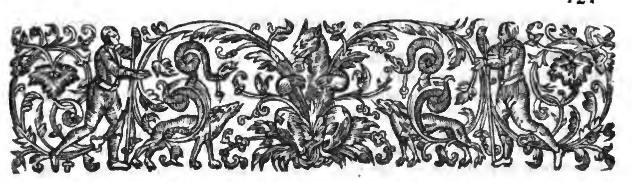
Cum locum inveftigamus, lineam rectam aut curvam inquirimus nobis tantifper ignotam, donec locum ipfum inveniendæ lineæ defignaverimus, fed cum ex fuppofito loco dato & cognito alium locum venamur, novus ifte locus porifma vocatur ab Euclide, qua ratione locos ipfos porifmatum unam fpeciem & effe & vocari veriffimè

Pappus ſubjunxit. Exemplo unico definitionem noſtram aſtruemus in figura 5'. poriſmatis, datâ rectâ R C, ſi quæratur curva quælibet ut R A B cujus ea ſit proprietas ut à quolibet ipſius puncto ut A demiſſa perpendicularis A D faciat quadratum A D æquale rectangulo R D C inveniemus curvam R A C eſſe circuli circumferentiam, ſed ſi ex dato jam loco illo alium inveſtigemus, problema verbi gratiâ poriſmatis 5'. novus iſte locus & infiniti alii quos periti ſagacitas Analyſtæ repræſentabit & ex jam cognito eliciet, poriſma dicetur.

Cum autem ut jam diximus Poriſmata ipſa ſint loci, errorem latini Pappi interpretis ex græco textu emendabimus eo loco ubi Poriſmatum opus perutile ait ad reſolutionem obſcuriorum problematum ac eorum generum quæ haud comprehendunt eam quæ multitudinem præbet naturam; quæ ultima verba cum nullum ferè ſenſum admittant ad ipſum authorem recurrendum cujus verba in manuſcriptis Codicibus ita ſe habent, Πορίσματα ἐπὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.

Ait igitur poriſmata conferre ad Analyſin obſcuriorum problematum & generum hoc eſt problematum generalium, ex dictis enim apparet poriſmatum propoſitiones eſſe generaliſſimas, deinde ſubjungit, cum natura multitudinem quæ vix poteſt animo comprehendi ſubminiſtret, quibus verbis infinitas illas & miraculo proximas ejuſdem problematis indicat ſolutiones. Huic autem vel theorematum vel problematum inventioni non deeſt peculiaris à puriore Analyſi derivanda methodus, cujus ope non ſolùm quinque præcedentia Poriſmata ſed pleraque alia & invenimus & conſtruximus & demonſtravimus, & ſi hæc paucula, quæ iſagogica tantùm & accuratioris operis prodroma emittimus, doctis arrideant, tres totos poriſmatum libros aliquandò reſtituemus, imò & Euclidem ipſum promovebimus & Poriſmata in coni ſectionibus & aliis quibuſcumque curvis mirabilia ſanè, & hactenus ignota detegemus.





LETTRES DE MONSIEUR DE FERMAT,

Avec quelques-unes de celles qui luy ont esté écrites par plusieurs personnes de grand sçavoir sur divers sujets de Mathematiques ou de Physique.

LETTRE DE M. DE FERMAT AU R. Pere Mersenne Minime.

Du 3. Iuin 1636.



ON R. PERE,

J'ay receu vôtre lettre avec satisfaction, puis qu'elle contient des remarques & des experiences tres singulieres. J'en fairay l'estime que je dois, & de tout ce qui me viendra de vôtre part. Je n'ay point veu de livre de Musique plus nouveau de vous que celuy que vous appellez questions harmoniques, que j'ay relié avec un autre recueil de questions, & les mechaniques de Galilæi, si la demonstration de la proposition de l'helice n'estoit pas de grand discours & de grande recherche, je vous l'envoyerois presentement; mais elle contiendra autant que deux des plus grands traitez d'Archimede, de sorte que je vous demande un peu de loisir pour cela, & cependant vous la pouvez tenir pour tres-veritable. J'en dresseray un traité exprez, ou je vous fairay voir de nouvelles helices aussi admirables qu'on en puisse imaginer. Pour vous en donner l'avant-goût, en voicy une, qui est peut-estre cette ligne que Menelaüs appelle admirable dans le Pappus.

Esto helix AMB in circulo CNB, cujus ea sit proprietas, ut ductâ qualibet rectâ, verbi gratiâ, A M N, tota circuli circumferentia sit ad ejusdem circumferentiæ portionem NCB ut AB quad. ad quad. AM (in hoc autem hæc helix differt ab helice Archimedis quod in helice Archim. sit ut circumferentia ad portionem NCB, ita

A B ad A M) pronunciamus primò ſpatium ſub helice & rectâ A B comprehenſum eſſe dimidium totius circuli.

Deinde (quæ eſt proprietas mirabilis) ſpatium ex prima revolutione ortum (quod hîc ſit N) eſſe dimidium ſpatii M , ex ſecunda revolutione orti , ſpatium verò C ex 3. revolutione ortum eſſe æquale ſpatio M , & omnia omnino deinceps ſpatia ex qualibet revolutione orta dicto ſpatio M ſimiliter eſſe æqualia, ideoque & inter ſe.

Je croy que vous m'avoüerez que ces recherches ſont belles, mais j'ay ſi peu de commodité d'en écrire les demonſtrations qui ſont des plus mal-ayſées , & des plus embarraſſées de la Geometrie, que je me contente d'avoir découvert la verité, & de ſçavoir le moyen de la prouver lorſque j'auray le loiſir de le faire. Si je puis trouver quelque occaſion d'aller paſſer trois ou quatre mois a Paris, je les employeray à mettre par écrit toutes mes nouvelles penſées en ces Arts, à quoy je pourray ſans doûte eſtre beaucoup aydé de vos ſoins. J'ay veu la Geoſtatique de Mr. de Beaugrand, & me ſuis étonné dabord d'avoir trouvé ma penſée differente de la ſienne, j'eſtime que vous l'aurez déja remarqué. Je luy envoye franchement mon avis ſur ſon livre, vous aſſurant que j'eſtime ſi fort ſon eſprit, & qu'il m'en a donné de ſi grandes preuves, que j'ay peine à me perſuader, qu'ayant entrepris une opinion contraire à la ſienne, je ne me ſois éloigné de la verité. Je conſens pourtant qu'il ſoit mon juge, & ne vous recuſe pas non plus. Et parceque j'ay écrit à la hâte la demonſtration que je vous envoya, & l'écrit que je luy envoye, je mettray tout au net à loiſir, & tacheray méme de trouver de nouvelles raiſons pour ſoutenir mon opinion, à laquelle pourtant, je ne m'attacheray jamais par opiniâtreté dés qu'il me faira connoître le contraire. Je ſuis, &c.

Au R. P. Merſenne Minime.

Du 24. Iuin 1636.

MON R. PERE,

Je ſuis marry de n'avoir peu vous faire preciſement comprendre mes ſentimens touchant ma propoſition Geoſtatique, Il eſt pourtant vray que je n'avois garde de la prendre au ſens que vous avez crû, car la ſeule raiſon que j'ay employée contre l'opinion de M. de Beaugrand, ça eſté celle-la méme que j'ay trouvée dans vôtre lettre, de ſorte que je n'avois garde de tomber dans un inconvenient que j'avois preveu & condamné. J'eſtime donc que tout grave, en quel lieu du monde qu'il ſoit, horſmis dans le centre, pris en ſoy & abſolument, peſe toûjours également ; & c'eſt une propoſition que j'aurois aiſement priſe pour principe ſi je ne la voyois conteſtée ; je tâcheray donc à la preuver. Mais qu'elle ſoit vraye ou non, cela n'empéche pas la verité de ma propoſition qui ne conſidere jamais le grave en ſoy, mais toûjours par relation au levier, & ainſi je ne mets rien dans la concluſion qui ne ſe trouve dans les premiſſes. Or l'equivoque, ſans doûte, eſt venüe de ce que je ne vous ay pas aſſez expliqué les nouvelles penſées que j'ay ſur le ſujet des Mechaniques, & leſquelles vous verrez groſſierement crayonnées ſur le papier que je vous envoye. C'eſt pourtant à la charge que vous m'obligerez de ne les communiquer à perſonne, & que vous me donnerez le loiſir pour en faire les demonſtrations exactes, ou plûtot pour les mettre au net, car elles ſont deja faites. L'erreur d Archimede, ſi pourtant nous le pouvons nommer ainſi, provient de ce qu'il a pris pour fondement que les bras de la balance arréteroint, quoy qu'ils ne feuſſent pas paralleles à l'horizon, dequoy j'ay demontré le contraire. Si vous examinez de nouveau la 6. & la 7. des equiponderans, vous trouverez que je ne me trompe pas, & que ſa demonſtration eſt toute fondée ſur cette ſuppoſition.

Car soit le levier E D B duquel le centre A, celuy de la terre C. Archimede pour demontrer la proposition reciproque des poids, les divise en parties égales comme E, & les attache en distances égales le long du levier. Or il suppose que le centre de gravité de deux poids est au point qui divise leur intervalle également, & cela est bien vray aux deux poids qui sont autour du point A, parceque la ligne A C, estant perpendiculaire au levier, les poids E autour du point A, se trouvent également éloignez, & du centre du levier & de celuy de la terre, & par consequent ils se trouvent d'égale inclination, mais si dans le méme levier vous prenez le point D qui divise l'intervalle des deux graves E également, en ce cas le point plus éloigné du centre du levier est aussi le plus éloigné du centre de la terre, & ainsi le point D avec les deux poids E represente une balance, de laquelle les bras ne sont pas paralleles à l'horison; mais si la descente des graves se faisoit par lignes paralleles comme en cette figure par les lignes A C, & D N, en ce cas la proposition d'Archimede seroit vraye. Ce n'est pas que dans l'usage elle manque sensiblement; mais il y a plaisir de chercher les veritez les plus menuës & les plus subtiles, & d'ôter toutes les ambiguitez qui pourroint survenir. C'est ce que j'ay fait tres exactement, & je vous puis assurer que quoy que la recherche en soit bien malaisée, j'en possede toutes les demonstrations parfaitement.

Soit le centre de la terre A, le grave E au point E, & le point N dans la superficie ou ailleurs plus éloigné du centre que le point E. Je ne dis pas, que le poids E pese moins estant en E, que s'il estoit en N, mais je dis que si le poids E est suspendu du point N par le filet N E, que la force étant au point N le retiendra plus aisément que s'il estoit plus proche de ladite force, & ce en la proportion que je vous ay assignée.

Je croy vous avoir suffisamment expliqué ma pensée sur ce sujet. Pour la question des nombres dont vous me parlez, si vous m'en faites part, je tâcheray de la resoudre: j'envoya il y a déja long-temps la proposition des parties aliquotes à M. de Beaugrand avec la construction pour trouver infinis nombres de méme nature. S'il ne l'a pas perduë, il vous en faira part. Je vous prie de relire ma proposition des graves, & de m'en dire vôtre avis. Je suis, &c.

Au R. P. Mersenne Minime.

Du 2. Septembre 1636.

MON R. PERE,

La lettre dont vous me parlez dans vôtre derniere s'est sans doûte égarée, car celle que je viens de recevoir est la seule qui m'est venuë depuis cinq ou six semaines de vôtre part; sur le sûjet de laquelle je vous diray, que quand nous parlons d'un nombre composé de trois quarrez seulement, nous entendons un nombre, qui n'est ny quarré ny composé de deux quarrez: & c'est ainsi que Diophante & tous ses interpretes l'entendent, lors qu'ils disent qu'un nombre composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne peut jamais estre divisé en deux quarrés, non pas méme en fractions. Autrement, & au sens que vous semblez donner à vôtre proposition, il n'y auroit que le seul nombre de trois qui fut composé de trois quarrez seulement en nombres entiers; car premierement tout nombre est composé d'autant de quarrés entiers, qu'il a d'unités. Secondement vos nombres de 11. & 14. se trouvent composez chacun de 5. quarrez. Le premier de 4. 4. 1. 1. 1. Le second de 4. 4. 4. 1. 1. que si vous entendez que le nombre que vous demandez soit composé de 3. quarrez seulement, & non pas de quatre.

en ce cas la question tient plus du hazard, que d'une conduite asſurée, & ſi vous m'en envoyez la conſtruction, peut-eſtre vous le fairay-je avouër. De ſorte que j'avois ſatisfait à vôtre propoſition, au ſens de Diophante, qui ſemble eſtre le ſeul admiſſible en cette ſorte de queſtions. Or qu'un nombre composé de 3. quarrez ſeulement en nombres entiers, ne puiſſe jamais eſtre divisé en 2. quarrez, non pas méme en fractions, perſonne ne l'a jamais encore demontré, & c'eſt à quoy je travaille, & crois que j'en viendray à bout, cette connoiſſance eſt de grandiſſime uſage, & il ſemble que nous n'avons pas aſſez de principes pour en venir à bout, M. de Beaugrand eſt en cela de mon avis. Si je puis ètendre en ce point les bornes de l'Arithmetique, vous ne ſcauriez croire les propoſitions merveilleuſesque nous en tirerons.Pour la propoſition Geoſtatique,elle eſt toute fondée ſur ce principe ſeul, que deux graves égaux joints par une ligne ferme & laiſſez en liberté ſe joindront au centre de la terre par le point qui diviſe également la ligne qui les unit, c'eſt à dire que ce point de diviſion s'unira au centre de la terre. Meſſieurs de Paſcal & de Roberval, aprés avoir reconnu que tout mon raiſonnement eſt fondé la deſſus, & qu'accordant ce principe, ma propoſition eſt ſans difficulté, m'ont nié ce principe, que je prenois pour un axiome le plus clair & le plus évident qu'on peut demander, obligez-moy de me dire ſi vous eſtes de leur ſentiment. Je l'ay pourtant démontré depuis peu par de nouveaux principes tirez des experiences qu'on ne me ſçauroit conteſter, & je le leur envoyeray au plûtot. Je ſuis, &c.

Lettre de Meſsieurs de Paſcal & de Roberval à M. de Fermat.

A Paris le 16. Aouſt 1636.

MONSIEUR,

Le principe que vous demandés pour la Geoſtatique eſt, que ſi deux poids égaux ſont joints par une ligne droite ferme & de ſoy ſans poids, & qu'étans ainſi diſpoſez ils puiſſent deſcendre librement, ils ne repoſeront jamais juſqu'à ce que le milieu de la ligne (qui eſt le centre de peſanteur des anciens) s'uniſſe au centre commun des choſes peſantes. Ce principe, lequel nous avons conſideré il y a long-temps, ainſi qu'il vous a eſté mandé, paroit d'abord fort plauſible: mais quand il eſt queſtion de principe, vous ſçavez quelles conditions luy ſont requiſes pour eſtre receu: deſquelles conditions, au principe dont il s'agit, la principale manque; ſçavoir, que nous ignorons quelle eſt la cauſe radicale qui fait que les corps peſants deſcendent, & quelle eſt l'origine de leur peſanteur. Ce qui n'étant point en nôtre connoiſſance (comme il faut librement avoüer, & en cecy, & quaſi en toutes les autres choſes phyſiques) il eſt évident qu'il nous eſt impoſſible de determiner, ce qui arriveroit au centre ou les choſes peſantes aſpirent, ny aux autres lieux hors la ſurface de la terre, ſur laquelle, parceque nous y habitons, nous avons quelques experiences aſſez conſtantes, deſquelles nous tirons ces principes en vertu deſquels nous raiſonnons en la Mechanique.

La diverſité des opinions touchant l'origine de la peſanteur des corps, aucune deſquelles n'a eſté juſques icy ny demontrée ny convaincue de fauſſeté par demonſtration, eſt un ample témoignage de l'ignorance humaine en ce point.

La commune opinion eſt, que la peſanteur eſt une qualité qui reſide dans le corps méme qui tombe.

D'autres ſont d'avis que la deſcente des corps procede de l'attraction d'un autre corps qui attire celuy qui deſcend, comme de la terre. Il y a une troiſiéme opinion qui n'eſt pas hors de vray-ſemblance ; que c'eſt une attraction mutuelle entre les corps, cauſée par un deſir naturel que ces corps ont de s'unir enſemble ; comme il eſt évident au fer & à l'aimant, léquels ſont tels, que ſi l'aimant eſt arreſté, le fer ne l'étant pas, l'ira trouver ; & ſi le fer eſt arreſté, l'aimant ira vers luy ; & ſi tous deux ſont libres, ils s'approcheront reciproquement l'un de l'autre ; en ſorte toutefois, que le plus fort des deux faira le moins de chemin.

Or de ces trois cauſes poſſibles de la peſanteur ou des centres des corps, les conſequences ſont fort differentes, particulierement de la premiere & des deux autres, comme nous fairons voir en les examinant.

Car ſi la premiere eſt vraye, le ſens commun nous dicte, qu'en quelque lieu que ſoit un corps peſant, prés ou loin du centre de la terre, il peſera toûjours également, ayant toûjours en ſoy la méme qualité qui le fait peſer, & en méme degré. Le ſens commun nous dicte auſſi (poſée cette méme opinion premiere) qu'alors un corps reposera au centre commun des choſes peſantes, quand les parties du corps qui ſeront de part & d'autre du méme centre, ſeront d'égale peſanteur, pour contrepeſer l'une à l'autre, ſans conſiderer ſi elles ſont peu ou beaucoup, également ou inégalement éloignées du centre commun.

Si cette premiere opinion eſt veritable, nous ne voyons point que le principe que vous demandez pour la Geoſtatique puiſſe ſubſiſter.

Car ſoint deux poids égaux A B joints enſemble par la ligne droite ferme & de ſoy ſans poids A B & ſoit C le point du milieu de la méme ligne A B, & ſoint D, E, deux autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A & B. Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B tombans librement avec leur ligne ne reposeront point juſqu'à ce que le point du milieu C s'uniſſe au centre commun des choſes peſantes. Suivant cette premiere opinion nous accordons, que ſi le point C eſt uny au centre des choſes peſantes, le composé des poids A B demeurera immobile veritablement. Mais il nous ſemble auſſi que ſi le point D ou E convient avec le méme centre commun des choſes peſantes, combien que l'un des poids en ſoit plus proche que l'autre, ils contrepeſeront encore & demeureront en equilibre : puiſque (pour nous ſervir de vos propres termes) ces deux poids ſont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au méme centre commun des choſes peſantes, & l'un n'a aucun avantage ſur l'autre pour le déplacer de ſon lieu. Et ne ſert de rien d'alleguer le centre de peſanteur du corps A B, lequel centre ſelon les anciens eſt au milieu C ; car il n'a pas eſté demontré que le point C ſoit le centre de peſanteur du composé A B ſinon lors que la deſcente des corps ſe fait naturellement par des lignes paralleles, ce qui eſt contre vos ſuppoſitions & les nôtres & contre la verité, & méme nous ne voyons pas qu'aucun corps, horſmis la Sphere, ait un centre de peſanteur, poſée la definition de ce centre ſelon Pappus & les autres Autheurs : & quand il y en auroit un en chaque corps, il ne paroit pas (& n'a jamais eſté demontré) que ce ſeroit ce point là par lequel le corps s'uniroit au centre des choſes peſantes : méme cela, pour les raiſons precedentes repugne à nôtre commune connoiſſance en pluſieurs figures, comme en la ſeconde des deux figures ſuivantes. En tout cas nous ne voyons point que ce centre de peſanteur des anciens doive eſtre conſideré autre part qu'aux poids qui ſont pendus ou ſoutenus hors du lieu auquel ils aſpirent.

Quand à la comparaiſon qui vous a eſté faite d'un levier horizontal, lequel eſtant preſſé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puiſſances égales, demeure en l'eſtat qu'il eſt : elle vous ſemble entierement pareille au levier precedent A B

(puis que vous le voulez appeller ainsi,) d'autant que ces poids ne pressent le levier que par la force ou puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun. Comme si le levier horizontal est A B, & les forces ou puissances égales A & B pressans horizontalement le levier pour se porter à un certain point commun C, auquel elles aspirent, & lequel est posé également ou inégalement entre les mémes puissances dans la ligne A B. Ces forces pressans également le levier, se resisteront l'une à l'autre selon nôtre sens ; encore meme que l'une comme A, fut plus proche que l'autre du point commun auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit pas horisontal, mais en telle autre position que l'on voudra, estant consideré de soy sans poids, & toutes les autres choses comme auparavant, le méme effet s'ensuivra selon nôtre jugement.

Nous adjouterons icy ce que nous pensons suivant cette premiere opinion, de deux poids qui seroint inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme & de soy sans poids.

Soint donc deux poids inégaux A & B, desquels A soit le moindre, & soit A B la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le point C soit le centre de pesanteur du composé des corps A B, selon les anciens ; ce point C ne sera pas au milieu de la ligne A B. Si donc on met le composé des poids A B, de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire que ce composé demeurera en cét estat, le poids A estant entierement d'une part du centre des choses pesantes, & le poids B entierement de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du méme centre des choses pesantes jusqu'à ce qu'une partie dudit poids B soit au delà dudit centre vers A comme la partie D, en sorte que cette partie D avec tout le poids A estant d'une méme part, soit de méme pesanteur que la partie E restante de l'autre part.

Si la seconde opinion touchant la cause de la descente des poids est veritable, voicy les consequences qu'on en peut tirer selon nôtre jugement.

Soit le corps attirant A B C D spherique duquel le centre soit H ; & que la vertu d'attraction soit également épanduë par toutes les parties du méme corps, en sorte que chacune selon sa puissance, tire à soy le corps attiré, ainsi que supposent les Auteurs de cette opinion.

Sur cette position, le sens commun nous dicte que les distances & autres conditions estant pareilles ; les parties égales du corps attirant, attireront également, & les inégales, inégalement.

Soit donc le corps attiré L, consideré premierement hors le corps attirant en A. soit méme la ligne droite A H, à laquelle soit un plan perpendiculaire E H D, coupant le corps A B C D en deux parties égales, & partant d'égale vertu. Soint aussi dans la ligne A H, pris tant de points que l'on voudra, comme K I, par lesquels sont menez des plans F I C, G K B paralleles au plan E H D coupans le corps attirant A B C D en parties inégales, & partant d'inégale vertu. Alors le corps L estant en A, sera attiré vers H par la vertu entiere de tout le corps A B C D ; & le chemin estant libre, il viendra en K ou étant il sera attiré vers H par la plus grande & forte partie B D E G, & contretiré vers A par la plus petite & plus foible partie B A G. Il en sera de méme quand il sera parvenu en I, ou il sera moins attiré que quand il estoit en K ou en A, toutefois il sera toûjours contraint de s'approcher du centre H, tant qu'il y soit venu : mais la partie qui attire diminuant toujours, & celle qui contre tire s'augmentant toûjours il sera continuellement attiré avec moins de vertu, jusqu'a ce qu'estant arrivé en H, il sera également attiré de toutes parts, & demeurera en cet estat.

Si cette position est vraye, il est facile de voir que le corps L pesera d'autant moins qu'il sera plus proche du centre H ; mais cette diminution ne sera pas en la raison des lignes H A, H K, H I, ce que vous connoitrez en le considerant sans autre explication.

Si la troisiéme opinion de la descente des corps est veritable les conclusions que l'on

en peut tirer sont les mémes, ou fort approchantes de celles que nous avons tirées de la seconde opinion.

Puis donc que de ces trois causes possibles de la pesanteur, nous ne sçavons quelle est la vraye, & que méme nous ne sommes pas assurez que ce soit l'une d'elles, se pouvant faire que la vraye cause soit composée des deux autres, ou que c'en soit une toute autre, de laquelle on tireroit des consequences toutes differentes, il nous semble que nous ne pouvons poser d'autres principes pour raisonner en cette matiere, que ceux desquels l'experience assistée d'un bon jugement nous a rendus certains.

Pour ces considerations dans nos conferences de Mechanique nous appellons des poids égaux ou inégaux, ceux qui ont égale ou inégale puissance de se porter vers le centre commun des choses pesantes, & nous entendons un méme corps avoir un méme poids quand il a toûjours cette méme puissance : que si cette puissance augmente ou diminüe, alors, quoy que ce soit le méme corps, nous ne le considerons plus comme le méme poids. Or que cela arrive ou non aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre commun des choses pesantes, c'est chose que nous desirerions bien de sçavoir : mais ne trouvans rien qui nous satisfasse sur ce sujet, nous laissons cette question indecise, raisonnans seulement sur ce que les anciens & nous avons peu découvrir de vray jusqu'a maintenant.

Voyla ce que nous avons à vous dire pour le present touchant vôtre principe de la Geostatique, laissans à part beaucoup d'autres doutes pour éviter prolixité de discours.

Quant à la nouvelle proportion des Angles que vous mettez en avant; afin de la demontrer, vous supposez deux principes, desquels le premier est vray : mais le second est si éloigné d'estre vray, qu'il y a des cas ou il arrive tout le contraire de ce que vous demandez qu'on vous accorde pour vray.

Le premier est tel. Soit A le centre commun des choses pesantes, l'appuy du levier N; & du centre A intervalle A N, soit décrite une portion de circonference telle quelle C N B, pourveu que l'arc C N soit égal à l'arc N B; & soit considerée la circonference C N B, comme une balance ou un levier de soy sans poids, qui se remüe librement à l'entour de l'appuy N, soint aussi des poids égaux posez en C & B. Vous supposez que ces poids fairont equilibre estans balancez sur le point N. Et il semble que tacitement vous supposez encore l'équilibre quand les bras du levier N C & N B seroint des lignes droites pourveu que les extremitez C & B soint également éloignées du centre A, & les lignes N C & N B, soûtendantes ou cordes en effet ou en puissance d'arcs égaux N C, N B.

Toutes ces choses sont vrayes en general; mais nous ne les croyons telles que pour les avoir démontrées par des principes qui nous sont plus clairs & plus connus.

Toutefois en particulier il y a une distinction à faire, laquelle est de grande consideration. Sçavoir que quand les arcs N C & N B sont chacun moindre qu'un quart de circonference, le levier C N B, chargé des poids C & B pese sur l'appuy N, poussant vers le centre A pour s'en approcher. Mais quand les arcs C N, N B sont chacun un quart de circonference, le levier C N B chargé des poids C, B ne pese nullement sur l'appuy N, d'autant que les poids sont diametralement opposez; & partant le levier demeurera de méme sans appuy qu'avec un appuy. Finalement quand les arcs égaux N C, N B sont chacun plus grand qu'un quart de circonference, le levier C N B chargé des poids égaux C, B pese sur l'appuy N poussant vers P, pour s'éloigner du centre A.

Cette distinction estant vraye comme elle est, vostre second principe ne peut subsister, ce qui paroîtra assez par l'examen d'iceluy.

Vostre second principe est tel. Soit A le centre commun des choses pesantes, la balance ou le levier E F B C D, dont l'appuy est D. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B pesant de toute sa puissance sur l'appuy B. Ou bien soit divisé le poids B en parties égales E F B C D, lesquelles soint posées sur le levier aux points E, F, B, C, D,

étans les arcs E F, F B, B C, C D égaux, & tout l'arc E F B C D décrit alentour du centre A ; vous ſuppoſez que le poids B mis tout entier au point B peſera de méme ſur l'appuy B, qu'eſtant poſé par parties égales aux points E F B C D. Cela eſt tellement éloigné du vray, que quelquefois le poids B, ainſi poſé par parties ſur le levier ne peſera plus du tout ſur l'appuy B ; quelquefois au lieu de peſer ſur l'appuy B pour tirer le levier vers A, il peſera tout au contraire ſur le méme appuy B pour éloigner le levier de A. Et toutefois eſtant ramaſſé tout entier au point B, il peſera toûjours de toute ſa force ſur l'appuy B, pour emporter le levier vers A. Et generalement eſtant divisé & étendu il peſera toûjours moins ſur l'appuy, qu'eſtant ramaſſé au point B, & vous ſuppoſez qu'entier & divisé il peſe toûjours de méme.

Toutes ces choſes ſont demontrées en ſuite de nos principes & nous vous en expliquerons les principaux cas que vous connoiſtrez veritables ſans aucune demonſtration.

Soit derechef A le centre commun des choſes peſantes, alentour duquel ſoit décrit le levier C B D qui ſoit de ſoy ſans poids, prolongé tant que de beſoin : & ſoit B le point de l'appuy, auquel ſi un poids eſt posé, nous demeurons d'accord avec vous qu'il peſera de toute ſa puiſſance ſur l'appuy B, lequel appuy s'il n'eſt aſſez fort rompra, & le poids s'en ira avec ſon levier juſques au centre A. Maintenant ſoit divisé le poids premierement en deux parties égales : & ayant pris les arcs B C & C D chacun d'un quart de circonference, afin que tout l'arc C B D ſoit une demie circonference ſoit posée une moitié du poids en D, l'autre en C ; lors ces deux poids C & D peſans vers A ne feront point d'autre effet ſur le levier C B D, ſinon qu'ils le preſſeront également par les deux extremitez C & D pour le courber. Suppoſant donc qu'il eſt aſſez roide pour ne pas plier ; ils demeureront ſur le levier de méme que s'ils étoient attachez aux bouts du diamettre D A C ſans qu'il ſoit beſoin de l'appuy B ſur lequel le levier chargé de ſes deux poids ne fait aucun effort : & quand cét appuy ſera oſté, le tout demeurera de méme qu'avec l'appuy, ce qui eſt aſſez clair.

Que ſi le poids eſt divisé en plus de deux parties égales, & qu'eſtant eſtendu ſur des portions égales du levier, deux d'icelles parties ſe rencontrent aux points C, D, & les autres dans l'eſpace C B D ; alors celles qui ſeront en C & D ne chargeront point l'appuy B : quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points C D, auſquels finit la charge : ainſi il s'en faudra beaucoup que toutes enſemble étenduës chargent autant l'appuy que lors qu'elles ſont ramaſſées en B : elles ne peſent donc pas de méme.

Davantage ſoint pris les arcs égaux B C & B D chacun plus grand qu'un quart de circonference, & ſoit imaginée la ligne droite C D ; puis eſtant divisé le poids en deux parties égales ſeulement, ſoint attachées l'une en C, & l'autre en D : alors il eſt clair que le levier chargé des poids C, D, peſera ſur l'appuy B ; mais ce ſera tout au contraire, que ſi les deux poids eſtoint ramaſſez en B : car ſi l'appuy n'eſt pas aſſez fort il rompra, & les poids emportans le levier, que nous ſuppoſons eſtre de ſoy ſans poids, ne ceſſeront de mouvoir tant que la ligne droite C D ſoit venuë au point A, le levier eſtant monté en partie au deſſus de B vers P, au lieu de s'abaiſſer vers A comme il arriveroit ſi les poids eſtans ramaſſez en B, avoint rompu l'appuy. Voyez quelle difference.

Enfin ſoit le levier comme auparavant, auquel ſoint des quarts de circonference B C, B D, & de part & d'autre du point C ſoint pris des arcs égaux C G, C E chacun moindre qu'un quart. De méme de part & d'autre du point D ſoint pris les arcs égaux entre eux & aux precedents D H, D F, tous commenſurables au quart. Soit auſſi diuisé tout l'arc E B F en tant de parties égales que l'on voudra, en ſorte que les points E, C, G, B, H, D, F, ſoint du nombre de ceux qui ſont la diviſion, & ſoit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc E B F, leſquelles parties de poids ſoint posées ſur les parties de la diviſion du levier : alors les poids qui ſe trouveront poſez ſur les arcs E C & F D déchargeront autant l'appuy B qu'il eſtoit chargé par ceux des arcs C G,

D H:

D H : partant tous ceux qui seront sur les arcs E G & F H ne chargeront point l'appuy B, lequel, par ce moyen ne sera chargé que par ceux qui seront sur l'arc G B H, & si entre B G & B H il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand ces arcs B G & B H ne fairont chacun qu'une partie de la susdite division du levier) alors l'appuy B sera entierement déchargé. Voyés donc combien il y a de difference entre les poids ramassez en B, & étendus par parties sur le levier E B F, voyez aussi qu'un méme poids divisé par parties, & étendu sur le levier, pese d'autant moins sur l'appuy B que plus grande est la portion qu'il occupe de la circonference décrite alentour du point A centre commun des choses pesantes.

Cette derniere consideration pourroit bien estre cause qu'un méme corps peseroit moins, plus proche que plus éloigné du centre commun des choses pesantes : mais la proportion de ces pesanteurs ne seroit nullement pareille à celle des distances ; & seroit peut-estre tres difficile à examiner.

Maintenant pour venir à vôtre demonstration. Soit le levier G I R, duquel l'appuy soit I, & que les extremitez G, R & l'appuy I soient également éloignez de A centre commun des choses pesantes, alentour duquel soit imaginée la portion de circonference G I R, & soit fait que comme l'arc G I est à l'arc I R, ainsi le poids R soit au poids G. Vous dites que le levier chargé des poids G R demeurera en equilibre sur son appuy I. Quant à la demonstration, vous supposez qu'elle est facile en consequence de vos deux principes precedens. Et de fait si ces principes estoint vrais, il ne resteroit aucune difficulté, & la chose se pourroit conclurre ainsi. Soit faite la preparation suivant la methode d'Archimede, en sorte que les arcs R Q, R M soient égaux, tant entre-eux qu'a l'arc I G ; & les arcs G B, G M égaux, tant entre-eux qu'a l'arc I R. Et soit estendu le poids R également depuis Q jusques en M, & le poids G aussi également depuis M jusques en B ; ainsi les deux poids G R seront également étendus, sur tout l'arc B G I M R Q, lequel arc sera quelquefois moindre que la circonference entiere, quelquefois égal à icelle, & quelquefois plus grand. Et d'autant que les portions I B, I Q sont égales, le levier B G I R Q demeurera en equilibre, par le premier principe sur l'appuy I. Mais le poids G étendu depuis B iusques en M pese de méme qu'estant ramasé au point G, par le second principe : & par le méme principe, le poids R posé de méme estant étendu depuis M jusques en Q, qu'estant ramasé au point R. Partant puis que ces deux poids estans ramassez en G & en R pesent de méme sur le levier, qu'estans étendus, & qu'estans étendus ils font equilibre sur le levier ; ils fairont encore equilibre estans ramassez en G & en R.

En cette demonstration tout ce qui est fondé sur le second principe, reçoit les mémes difficultez que le principe méme : & partant la conclusion ne s'ensuit point que les poids G R, fassent equilibre sur le levier G I R.

Nous pouvons nous contenter de ce que dessus, croyans que vous serez satisfait : mais nous vous prions de considerer encore deux instances dont la premiere est telle.

Au levier G I R soit l'angle G I R droit, & partant l'arc G I R, une demie circonference décrite autour de A centre commun des choses pesantes. Si l'on pose l'arc G I, moindre que l'arc I R, par exemple que G I soit le tiers de I R & le poids R de 20. livres ; il faudroit donc en G 60. liures selon vous, pour faire equilibre sur le levier G I R appuyé au point I, & toutefois si vous mettez des poids égaux en G & en R, ils seront diametralement opposez, & partant par le principe de la Geostatique au cas dudit principe, accordé par vous & par nous, lesdits poids égaux fairont encore equilibre comme s'ils pesoint sur les extremitez du diametre G R vers le centre A ; & quand il y a une fois equilibre, pour peu que l'on augmente ou diminuë l'un des poids l'equilibre se perd. Voyez comme cela se peut accorder avec vôtre position.

La seconde instance est telle. Soit A le centre commun des choses pesantes à l'entour duquel soit la circonference G I R, l'appuy du levier I, & les bras I G, I R desquels G I.

R

soit le moindre, & soit prolongée la ligne droite I A tant qu'elle rencontre la circonference en B. Partant selon vous, il faudra en G un plus grand poids qu'en R. Et si on prend l'arc I C plus grand que I R, mettant en C le méme poids qui estoit en R, il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant pour faire l'equilibre. De méme prenant l'arc I D. encore plus grand que I C, & faisant I D estre le bras du levier, & mettant en D le méme poids qui estoit en C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainsi plus le bras du levier qui est en la circonference I R B, aboutira prés du point B, estant chargé du méme poids, plus il faudra en G un grand poids pour contrepeser. Et selon le sens commun par le raisonnement ordinaire, le bras du levier estant la ligne droite I B chargé comme dessus, il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois alors le poids qui sert en B, pesant vers A feroit tout son éffort sur la roideur du bras B I, & le moindre poids qui seroit en G feroit balancer le bras I B vers D: & pour peu que le poids qui sera en G fasse balancer le bras I B avec son poids, vers D (ce qui est facile à démontrer) alors encore que tant G que B sortent hors la circonference, on conclurra quelque chose de choquant de vôtre position.

Enfin, Monsieur, parceque l'experience de ce que dessus, ne se peut faire par les hommes, dés poids à l'égard de leur centre naturel; si vous voulez prendre la peine de la faire alentour d'un centre artificiel, supposant pour levier un petit cercle artificiel, au lieu du grand cercle naturel, & des puissances qui agissent ou aspirent vers le centre du petit cercle au lieu des poids qui tendent vers le centre du grand, vous trouverez que l'experience est du tout conforme à ce raisonnement.

Si vous avez agreable de continuer nos communications sur ce sujet ou sur celuy de la Geometrie en laquelle nous sçavons que vous excellez entre tous ceux de ce temps, nous tâcherons à vous donner contentement: & ce que nous vous proposerons ne sera point par forme de questions, car nous en envoyerons les demonstrations en méme temps pour en avoir vostre jugement. Vous nous obligerez aussi de nous faire part de vos pensées. Nous sommes, &c.

Lettre de M. de Fermat à Messieurs de Pascal & de Roberval.

Du 23. Aoust 1636.

MESSIEURS.

J'ay leu avec grand soin le jugement qu'il vous a plû me donner des propositions que j'avois envoyées à M. de Carcavi, & comme j'ay reconnu la fermeté de vôtre raisonnement jointe avec une grande & profonde connoissance de cette matiere, j'ay aussi cru que vous ne trouveriez pas mauvaise ma replique que je fairay en peu de mots, & que peut-estre je tireray à ce coup de vous le consentement que vous n'avez pas voulu m'accorder d'abord, & je ne pense pas avoir besoin de m'excuser des erreurs qu'il vous a semblé que j'avois commises, à quoy quand je ne répondrois que par la hâte que j'eus décrire à M. de Roberval, lequel j'avois prié de suppleér ce qui ne seroit pas expliqué assez au long, j'aurois peut-estre suffisamment satisfait; mais pourtant je vous declare que je n'ay jamais crû parler que du levier moindre que le demi-cercle, & si j'ay obmis de l'écrire, ma figure qui n'en representoit que celuy-là reparoit assez ce manquement, puisque je n'avois pas seulement eu le temps d'écrire la demonstration de ma proposition sur madite figure, que si le levier est plus grand que le demy cercle j'ajoûteray à la fin de ce discours la proportion qu'il doit garder. Il me semble que j'en ay assez dit pour répondre à la plus forte des objections que vous avez faites contre mon second levier.

l'autre qui combat mon second principe a esté preveüe par moy, & je vous avoüeray que quoy que ce second principe soit manifestement faux, & qu'il choque mon sentiment sur le fait du premier levier, je l'avois pourtant industrieusement, & à dessein mis dans ma lettre, afin de vous faire accorder qu'vn grave pese moins, plus il approche du centre de la terre, ou en me niant cette verité vous obliger d'accorder celle de mon second levier. Monsieur de Carcavi à qui je l'avois écrit quelque temps auparavant que de recevoir vos lettres vous le temoignera sans doute, & j'en ay tiré du moins le profit que vous m'avez accordé qu'un grave pese moins plus il approche du centre, quoy qu'il soit mal aisé de determiner la proportion de la difference de ces poids; je me contente d'avoir dit ce peu de mots par avance, & viens à la demonstration de mon second levier, aprés vous avoir asseuré que jamais homme du monde ne se portera avec plus de bonne foy & d'ingenuité que moy à avoüer les veritez que j'auray reconnuës, & que je croy ma proposition tellement vraye, que l'ayant souvent considérée de divers biais & à diverses reprises, je n'ay jamais peu en doûter.

Voicy les vrais principes de ma demonstration.

Axioma 1. Si grave quiescens ab aliquo puncto suspendatur, gravitabit super lineam rectam punctum suspensionis & centrum terræ conjungentem.

Patet axiomatis veritas quia aliter grave non quiesceret. Axioma 2. in vecte circulari cujus dimidium punctum suspensionis si ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, corpus ex omnibus illis gravibus compositum & à medio ille puncto suspensum quiescet.

Axioma 3. in vecte circulari semicirculo minori cujus centrum est centrum terræ (hoc enim in nostro vecte semper intelligendum) si punctum suspensionis inæqualiter vectem dividat, & ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, non manebit corpus ex omnibus illis gravibus compositum sed inclinabitur vectis ex parte majoris portionis; hoc patet etiam ex vestris positionibus, cum enim totus vectis sit semicirculo minor, sinus minoris portionis erit minor sinu majoris portionis, ideoque non negabitis inclinationem fieri ex parte majoris portionis.

His suppositis exponatur figura continens vectem D E G, & perficiantur reliqua juxta præparationem Archimedeam, grave in D dispositum per partes æquales in portiones B C, C D, D E, E F, gravitat super rectam D N, nam suspensum à puncto D, per secundum axioma quiescit, ergo per primum gravitat super D N, igitur sive totum sit in D, sive dispositum per partes æquales in portiones B C, C D, D E, E F, semper super eamdem rectam D N gravitat, similiter grave in G, sive totum sit in G, sive per partes æquales F G, G H, disponatur semper super eamdem rectam G N gravitabit, cum autem gravia per partes æquales B C, C D, D E, E F, F G, G H disposita sint æqualia, gravitabit aggregatum totius gravis super rectam E N, ergo patet conclusio, aut per deductionem ad absurdum inde facillimè derivatur ope 3. axiomatis.

Eadem certè erat Archimedis ratiocinatio, nam rectæ B D, centrum gravitatis verbi gratiâ in C constituit ut probet gravia æqualia in punctis B D, super rectam C N gravitare, quod ille supponit cum in librâ tantum D E F hoc verum sit quæ ad rectam E N, est perpendicularis, in reliquis falsum, quia ad angulos inæquales à rectis à centro terræ secantur, in nostro autem vecte hæc difficultas non occurrit cum semper & in quocumque puncto rectæ à centro terræ eum normaliter secent. Sit libra D C B, centrum terræ A, centrum libræ C, compleatur circulus centro C intervallo C B, descriptus & D E A, B A, C F A, jungantur, jungatur & C E, ponantur in punctis B & D, pondera æqualia & sit angulus ad C D, major angulo A C B, aio libram à puncto C, suspensam ad partes B inclinari idque per supposita ab Archimede; pondus à puncto D ad punctum E, transferatur ex Archimede, idem est ac si pondus esset in puncto D, quia ponitur in recta, punctum D, & centrum terræ conjungente, si igitur intelligatur recta C E, pondus in E retinere, manebunt ex Archimede brachia C E & C B, cum ponantur manere C B & C D,

igitur anguli E C F, F C B, erunt æquales: triangulum enim æquicrure in cujus extremis æqualia pondera collocantur, movetur ſemper donec perpendicularis horizontis, hoc eſt recta verticem & centrum terræ conjungens angulum ad verticem biſecet, quod experientia teſtatur; Angulus autem E C B duplus eſt anguli ad D, ergo angulus F C B, angulo D eſt æqualis, parallelæ igitur erunt C A & D A, quod eſt abſurdum, non ergo quieſcit libra, ſed ad partes B inclinatur quia angulus B C F, major eſt angulo E C F, ut patet. Voilà en peu de mots ma replique pour le ſecond levier, laquelle j'euſſe plus eſtendue ſi le temps me le permettoit, que ſi le levier eſt plus grand que le demi-cercle comme C A B duquel le point de ſuſpenſion eſt A, les extremitez C B, alors le levier ne ſoutiendra plus, mais ſera preſſé en haut par ces deux poids, de ſorte qu'il faut prendre la proportion reciproque des deux angles CND, D N B, apres avoir prolongé la ligne A N, la demonſtration en eſt auſſi aiſée que celle du premier cas.

Pour le premier levier, ſoit le centre de la lettre B, les poids égaux A, & C, & la ligne B C plus grande que B A. Si vous m'accordez que ce poids en C peſe plus qu'en A (quoy que vous eſtimiez qu'il ſoit mal-aiſé d'en determiner la proportion) mes affaires ſont faites; Car il deſcendra donc, & la méme raiſon ayant toujours lieu juſques à ce que la ligne C B ſoit égale à B A, il ne s'arreſtera pas plûtôt: & que cela ſe faſſe par attraction ou autrement, la choſe eſt indifferente.

Toutefois je vous puis aſſûrer que je puis prouver cette meſme propoſition par des experiences que vous ne ſçauriez conteſter, & que je vous envoyeray au long de que la commodité me le permettra, cependant voicy une de mes propoſitions Geometriques, puis qu'il ſemble que vous ayez deſiré d'en voir.

Sit Parabola A B, cujus vertex A & circa rectam D A ſtabilem figura D A B circumvertatur, deſcribetur conois parabolicus Archimedæus cujus proportio ad conum ejuſdem baſis & verticis erit ſeſquialtera; quod ſi circa ſtabilem D B figura D A B circumvertatur, fiet novus conois cujus proportio ad conum ejuſdem baſis & verticis quærebatur, eam nos eſſe ut 8, ad 5, demonſtravimus, nec res vacabat difficultate. Imò & centrum gravitatis ejuſdem conoidis invenimus.

J'ay trouvé beaucoup d'autres propoſitions geometriques, comme la reſtitution de toutes les propoſitions de locis planis, & autres, mais ce que j'eſtime plus que tout le reſte eſt une methode pour determiner toutes ſortes de problemes plans ou ſolides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention maximæ & minimæ in omnibus omnino problematibus, & ce par une equation auſſi ſimple & aiſée que celles de l'analyſe ordinaire; il y a infinies queſtions que je n'aurois jamais peu reſoudre ſans cela, comme les deux ſuivantes que vous pouvez eſſayer ſi vous voulez.

Datæ Sphæræ inſcribere conum omnium inſcribendorum ambitu maximum.

Datæ Sphæræ inſcribere Cylindrum omnium inſcribendorum ambitu maximum.

J'entens per ambitum, non ſeulement ſuperficies conicas & cylindricas, mais le circuit entier compris au cone du cercle de la baſe & de la ſuperficie conique, & au cylindre des deux cercles des baſes & de la ſuperficie cylindrique.

Il ſemble que ces deux queſtions ſont neceſſaires pour une plus grande connoiſſance des figures iſoperimetres.

Cette methode ne ſert pas ſeulement à ces queſtions, mais à beaucoup d'autres, & pour les nombres & pour les quantitez. Vous m'obligerez infiniment de me faire part des productions de voſtre eſprit, & de me croire, &c.

A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques à Paris.

MONSIEUR,

Apres vous avoir remercié de la faveur que vous m'avez faite, & de la peine que vous avez prise, je répondray en peu de mots aux objections que j'ay trouvé dans vôtre Lettre & ce sans aucun esprit de dispute, & pour vous faire seulement approuver la verité de mes propositions.

La premiere objection consiste en ce que vous ne voulez pas accorder que le mitan d'une ligne qui conjoint deux poids égaux descendans librement s'aille unir au centre du monde; en quoy certes il me semble que vous faites tort à la lumiere naturelle & aux premiers principes : car puis que ces deux poids sont égaux, & qu'ils ont tous deux méme inclination pour s'unir au centre du monde s'ils n'estoient pas empéchez, il est clair qu'ils y approcheront tous deux egalement, autrement ayant supposé les poids égaux & les inclinations au centre égales, vous admettriez neantmoins plus de resistance d'un costé, ce qui seroit absurde, & n importe d'alleguer un levier horizontal, lequel estant pressé par deux forces égales aux deux bouts horizontalement, demeure neantmoins en l'estat qu'il est, quoy que l'appuy qui est au dessoûs le divise en parties inégales, car au cas de ma proposition, la verité de mon principe depend de ce que les deux poids ou puissances, ont naturellement inclination au centre de la terre, & tendent là; & c'est pourquoy n'ayant point d'avantage l'un sur l'autre ils s'y approchent tous deux également; mais en l'espece du levier horizontal les deux puissances des extremitez n'ont aucune inclination naturelle à l'appuy, mais à s'approcher seulement, & ainsi l'appuy ne doit étre non plus consideré que s'il n'estoit point, outre que jamais personne n'a doûté que le centre d'un grave ne s'unit au centre de la terre s'il n'estoit empéché : or deux graves joints par une ligne qui conjoint leurs centres de gravité ne sont censez constituer qu'un seul grave, duquel le centre de gravité est au mitan de la ligne qui les conjoint; quelle raison donc de croire qu'il s'arreste ailleurs, que lors que son centre sera uny à celuy de la terre? soint les deux poids égaux A & B joints par la ligne A B, le centre de la terre C, qu'on laisse cheoir librement les poids A & B, lors que le poids B sera au centre C, on ne peut pas dire qu'il s'arreste, parce que les poids A, gravitat super B, & destruit æquilibrium; où commencera donc le levier A B de s'arrester? vous ne sçauriez trouver le commancement de son repos en un point plutôt qu'en l'autre, si ce n'est au mitan, parce qu'il se trouve pour lors également contrebalancé de tous côtez, je ne sçay si ces raisons seront capables de vous faire changer d'avis, mais vous me permettrez bien de vous dire que vous trouverez peu de gens qui suivent vôtre opinion, & qui ne m'accordent ce principe : c'est pourquoy je vous conjure de me dire nettement ce qu'il vous en semble.

La deuxiéme objection est contre la nouvelle proportion des angles que j'ay decouverte, contre laquelle pourtant vous n'avez rien dit de precis, mais seulement que vous avez démonstré que la proportion reciproque des poids doit estre expliquée non pas par les angles, mais par les sinus de ces angles. Voicy la demonstration de ma proposition de laquelle vous verrez aisement par consequent celle de toutes celles que vous avez veues dans l'ecrit que j'envoya à Monsieur de Carcavi.

Sit centrum terræ A, vectis C N B, portio circuli centro A intervallo A N descripti C N, C B æquales circumferentiæ & in punctis C B æqualia pondera, supponimus vectem C B à puncto N suspensum manere idemque accidere si gravia

æqualia in quibuslibet punctis brachiorum C N, N B collocentur, modo hujusmodi puncta ex utraque parte æqualiter à puncto N distent neque enim destruent, æquilibrium pondera æqualia à centro terræ & à centro vectis sive libræ æqualiter distantia, sit centrum terræ A, vectis sive libra E F B C D, ut supra centrum sive medium libræ punctum B, collocetur pondus B, in puncto B, aut diviso pondere B, in partes æquales E F B C D, collocentur eæ partes in punctis E F B C D, & sint intervalla E F, F B, B C, C D, æqualia, supponimus pondus B, in puncto B collocatum & à puncto B, suspensum idem ponderare ac partes E F B C D simul sumptæ in vecte collocatæ & ab eodem puncto B suspensæ, illud nempe accidit quia propter circulum E F B C D, partes ponderis B, eamdem semper servant distantiam à centro terræ ac pondus ipsum integrum B, quod non animadvertisse & descensus gravium parallelos supposuisse errorem peperit Archimedæum. His suppositis propositionem nostram demonstramus & cum tantùm casum in quo tum vectis centrum, tum extrema æqualiter à centro terræ distant, quia hic casus veritatem prioris vectis Geostatici non supponit, de qua videris ambigere, sit vectis F H, in cujus centrum H, extrema F, & M, in eadem quo punctum H, à terræ centro distantia, centro A, intervallo AH, describatur portio circuli F H M, vectis extrema committens & sit grave in F, ad grave in M. in proportione reciproca circumferentiæ M G, ad circumferentiam H A, aio vectem H F M, à puncto H, suspensum mansurum & æquilibrium constituturum, hanc autem proportionem eamdem esse quæ angulorum ad centrum A, patet ex constructione & duobus axiomatibus præcedentibus facillimè theorema concludes.

La hâte du Courrier me fait finir là, parce que je ne doûte pas que vous ne puissiez voir la conclusion avec un peu de meditation.

Au reste je vous puis assûrer que le Livre qu'il vous a plû m'envoyer est ce que j'ay veu de plus ingenieux sur cette matiere, mais si mes propositions sont vrayes, dequoy peut-être vous ne doûterez pas toûjours, vous m'accorderez que ce mouvement sur les plans inclinez se peut prouver encore plus precisement, ce n'est pas que je n'estime autant que je dois vôtre invention; Mais ce que le Chancellier Bacon a dit est bien vray, multi pertransibunt, & augebitur scientia. Je suis, &c,

A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques à Paris.

Du 16. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je me trouvay ces jours passez à la campagne lors que je répondis à vostre écrit, que j'avois pourtant laissé en cette Ville. Depuis mon retour je l'ay consideré plus exactement, & vous envoye la réponse plus precise à tous ses points concernant le premier levier. Si vous ne goûtez pas mes raisons sur le second, vous m'obligerez beaucoup de m'envoyer la démonstration de vostre proposition suivant l'opinion où vous estes, que les graves gardent la proportion reciproque des perpendiculaires tirées du centre du levier sur les pendans, & de laquelle je doûteray toûjours jusques à ce que je l'auray veüe. Je vous puis pourtant asseurer que je ne sçaurois démordre encore de la mienne, & qu'il me semble que vous ne sçauriez démonstrer la vostre, au moins par les prin-

cipes que nous connoiſſons, permettez moy de changer de matiere, & de vous demander la demonſtration de cette propoſition que j'advoue franchement que je n'ay encore ſceu trouver, quoy que je ſois aſſeuré qu'elle eſt vraye.

Summa quadratorum à duabus rectis rationalibus longitudine commenſurabilibus, ſi ad duplum ſummæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo exceſſus erit apotome.

Vous ne ſçauriez croire combien la ſcience du dixiéme Livre d'Euclide eſt deffectueuſe, je veux dire que cette connoiſſance n'a pas encore fait de grands progrez, & qu'elle eſt pourtant de grandiſſime uſage. J'y ay découvert beaucoup de nouvelles lumieres, mais encore la moindre choſe m'arreſte, comme le Theoreme que je viens de vous écrire qui ſemble d'abord plus aiſé à démonſtrer qu'il n'eſt pas, j'attends de vos nouvelles, & ſuis, &c.

Le principe que je vous ay demandé pour l'établiſſement de mes propoſitions Geoſtatiques eſt, que ſi deux poids égaux ſont joints par une ligne droite ferme, & de ſoy ſans poids; & qu'eſtant ainſi diſpoſez ils puiſſent deſcendre librement, ils ne repoſeront jamais juſques a ce que le milieu de la ligne s'uniſſe au centre commun des choſes peſantes, ce principe qui vous a ſemblé plauſible d'abord, a enfin choqué vôtre opinion ſur ce principalement que nous ignorons la cauſe radicale, qui fait que les corps graves deſcendent, ſur quoy vous dites qu'il y a trois opinions differentes, & que de toutes les trois les conſequences ſemblent differentes.

Je ne repete point vos mots, ny vos raiſons, je me contente d'y répondre, & primò en la premiere opinion.

En vôtre figure vous dites qu'il vous ſemble que ſi le point D, ou E, convient avec le centre commun des choſes peſantes, combien que l'un des poids en ſoit plus proche que l'autre ils contrepeſeront encore, & demeureront en equilibre. Puiſque, dites vous (pour me ſervir de vos propres termes) ces deux poids ſont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au centre commun des choſes peſantes, l'un n'a aucun advantage ſur l'autre pour le déplacer de ſon lieu.

Or ſi ce raiſonnement eſt bon, voyez-le dans la figure ſuivante dans laquelle j'employeray les mémes mots.

Soit le centre de la terre D, un point dans ſa ſurface ou ailleurs C, ſoit jointe la ligne C D, & ſoit au point C, attaché le levier B C, C A, duquel les bras B C, C A, ſoient égaux & les poids B & A auſſi égaux, l'angle B C A ferme. S'il n'y avoit point le poids en B, la ligne C A s'uniroit à la ligne C D, c'eſt à dire que le poids A s'aprocheroit du centre D, autant qu'il pourroit, & tout de méme de la ligne B C, ſoit fait l'angle B C D moindre que D C A, par le precedent raiſonnement, le levier s'arreſtera (ce qui eſt contre l'experience) puis que les deux poids A & B ſont égaux, & ont tous deux méme inclination de s'unir au centre D, ſive à la ligne C D, & l'un n'a aucun advantage ſur l'autre pour le déplacer de ſon lieu; or de méme qu'en ce cas l'experience nous fait voir que ces deux poids approcheront également du centre D, & de la ligne C D, il ne faut pas doûter qu'au premier cas ils n'aprochent également du centre de la terre, & la raiſon de toutes ces deux propoſitions eſt, qu'ayant méme inclination au centre, & ne pouvant tous deux y deſcendre, à cauſe qu'ils s'entrempéchent, ils y approchent du moins également, autrement la force de celuy qui y approcheroit d'avantage ſeroit plus grande.

L'exemple du levier horizontal ne fait rien a la queſtion; car pour marquer que les poids B & A n'ont pas leur inclination au point C, il ne faut qu'ôter la ligne C D, ſur laquelle le levier s'appuye, & le levier ne reſtera pas de demeurer s'il eſt preſſé par les poids A & B horizontalement, de ſorte que le point C n'eſt non plus conſiderable que tel autre de ligne B A, que vous prendrés; & cela eſtant l'exemple eſt inutile:

parce que la principale raison de mon principe dépend de l'inclination des graves au centre de la terre.

Ce que vous adjoûtez de deux poids,qui seroient inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme, & de soy sans poids, n'est non plus recevable; car vous acccordant que lors que vous niez un plan perpendiculaire à la ligne qui joint les deux poids comme vous faites en vôtre figure, il est certain qu'en ce cas, il y a de chaque costé du centre une grandeur égale. Il arrive pourtant cent cas, ausquels si vous coupez les deux poids par un autre plan passant par le centre, les grandeurs qui seront de chaque costé seront inégales, & ainsi un méme corps en méme temps arrêtera & n'arrêtera pas, & n'importe de dire que ce plan doit être toûjours perpendiculaire à la ligne qui joint les deux graves; car vous sçavez qu'autour du centre tous endroits sont indifferens, & omnia intelliguntur sursum, omnia deorsum, il faut donc necessairement prendre les repos des poids, non pas de cette façon, mais de la proportion reciproque suivant mon sentiment.

Voilà en peu de mots la réponse à vôtre premiere opinion que j'eusse peu étendre d'avantage & tirer méme la demonstration de mon principe de l'experience que je vous ay donnée, comme il vous sera aisé de voir.

Si la seconde opinion est vraye mon principe est infaillible; car en ce cas vous dites que le corps pesera d'autant moins qu'il sera proche du centre, mais cette diminütion ne sera pas en la raison des éloignemens.

Or puis qu'un corps pese moins en ce cas à mesure qu'il est plus proche du centre, donc il sera toûjours pressé par le plus éloigné, jusques à ce qu'ils soint également éloignez du centre.

En la 3. opinion les mémes raisons sont bonnes, je seray bien aise que Monsieur Pascal voye ma Lettre, si vous l'agreés.

A Monsieur de Roberval Professeur aux Mathematiques à Paris.

Du 22. Septembre 1636.

MONSIEUR,

Je surseoiray avec vôtre permission à vous écrire sur le sujet des propositions de Mechanique jusques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonstration des vôtres; ce que j'attends au plûtôt sur la promesse que vous m'en faites. Sur le sujet de la methode de maximis & minimis, vous sçavez que puisque vous avez veu celle que Monsieur Despagnet vous a donnée,vous avés veu la mienne que je luy baillay il y a environ sept ans étant à Bourdeaux, & en ce temps là je me ressouviens que Monsieur Philon ayant receu une de vos Lettres, dans laquelle vous luy proposiez de trouver le plus grand Cone de tous ceux qui auront la superficie conique égale à un cercle donné, il me l'envoya, & j'en donnay la solution à Monsieur Prades, pour vous la rendre, si vous rappellez vôtre memoire, vous vous en souviendrez peut-être, & que vous proposiez cette question comme difficile,& ne l'ayant pas encore trouvée. Si je rencontre parmi mes papiers vostre Lettre, que je garday pour lors, je vous l'envoyeray. Si Monsieur Despagnet ne vous a proposé ma methode que comme je la luy baillay pour lors, vous n'avez pas veu ses plus beaux usages. Car je la fais servir en diversifiant un peu, Premierement pour l'invention des propositions pareilles à celle du Conoide que je vous envoyay par ma derniere. 2. Pour l'invention des tangentes des lignes courbes, sur lequel sujet je vous propose ce probleme, ad datum punctum in conchoide

conchoide Nicomedis invenire tangentem. 3. Pour l'invention des centres de gravité de toute sorte de figures aux figures mémes differentes des ordinaires comme en mon Conoide & autres infinies, dequoy je fairay voir des exemples quand vous voudrez. 4. Aux problemes numeriques, ausquels il est question de parties aliquotes, & qui sont tous tres-difficiles. C'est par ce moyen que je trouvay 672. duquel les parties sont doubles aussi bien que celles de 120. le sont de 120, c'est aussi par là que j'ay trouvé de nombres infinis qui font la méme chose que 220.& 284.c'est à dire que les parties du premier égalent le second, & celles du second le premier, dequoy si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont 17296. & 18416. je m'assûre que vous m'advoüerez que cette question & celles de sa sorte sont tres-mal-aisées: j'en envoyay il y a quelque temps la solution à Monsieur de Beaugrand; j'ay aussi trouvé des nombres en proportion donnée ou qui surpassent d'un nombre donné leurs parties aliquotes & plusieurs autres. Voilà quatre sortes de propositions que ma methode embrasse, & que peut-estre vous n'avez pas sceües: sur le sujet du premier j'ay quarré infinies figures comprises de lignes courbes, comme par exemple si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du Diametre,cette figure approchera de la parabole, & ne differe qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrez, je prends en celle-cy celle des cubes (& c'est pour cela que Monsieur de Beaugrand,à qui j'en fis la proposition,l'appelle parabole solide) or j'ay démonstré que cette figure est au triangle de méme base & hauteur,en proportion sesquialtere.Vous trouverez en la fondant qu'il m'a falû suivre une autre voye que celle d'Archimede en la quadrature de la parabole, & que je n'y fusse jamais venu par là. Puisque vous avez trouvé ma proposition du Conoïde excellente, la voicy plus generale.

Si circa rectam D A parabole (cujus vertex B & axis B F & applicata A D) circumducatur, fiet conoides novæ speciei, quo secto bifariam plano ad axem recto, dimidium ipsius ad conum ejusdem basis & altitudinis est ut 8. ad 5. Si verò plano secetur ad axem recto inæqualiter, puta per punctum E, segmentum conoidis A B C E ad conum ejusdem basis & altitudinis est ut quintuplum quadrati E D unà cum rectangulo A E D bis & rectangulo sub D F, & A E ad quadrati E D quintuplum, & vicissim segmentum conoidis D C E est ad conum ejusdem basis & altitudinis ut quintuplum quadrati A E, unà cum rectangulo A E D bis, & rectangulo sub D F & D E ad quadrati A E quintuplum.

Pour la demonstration, outre les aydes que j'ay tirées de ma methode, je me suis servi des cylindres inscrits & circonscrits.

J'avois obmis le principal usage de ma methode qui est pour l'invention des lieux plans & solides,elle m'a servi particulierement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé si difficile. Si à quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ, & sint species quæ ab omnibus fiunt dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

Tout ce que je viens de vous dire ne sont qu'exemples; car je vous puis assûrer que sur chacun des points precedents, j'ay trouvé un tres-grand nombre de tres-belles propositions. Je vous envoyeray la demonstration de celles que vous voudrez. Permettez-moy neantmoins de vous prier de les essayer plûtôt, & de m'en donner vôtre jugement. Au reste depuis la derniere Lettre que je vous écrivis, j'ay trouvé la demonstration de la proposition que je vous faisois, elle ma donné grandissime peine, & ne se presente pas d'abord. Je vous conjure de me faire part de quelqu'une de vos pensées, & de me croire, &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 11. Octobre 1636.

MONSIEUR,

Je vous envoye la demonstration de la proposition fondamentale de nostre Mechanique, ainsi que ie vous l'ay promis. En quoy je suivray l'ordre commun d'expliquer auparavant les definitions & principes desquels nous nous servons.

Nous appellons en general une puissance cette qualité par le moyen de laquelle quelque chose que ce soit tend ou aspire vers un autre lieu que celuy ou elle est, soit en bas, en haut, ou a costé : soit que cette qualité convienne naturellement à la chose, ou qu'elle luy soit communiquée d'ailleurs. De laquelle definition il s'ensuit que tout poids est une espece de puissance, puisque c'est une qualité, par le moyen de laquelle les corps aspirent vers la partie inferieure. Souvent nous appellons aussi du nom de puissance la chose méme, à laquelle la puissance convient, comme un corps pesant est appellé un poids ; mais avec cette precaution que ce soit à l'égard de la vraye puissance, laquelle augmentant ou diminuant, sera appellée plus grande ou moindre puissance, quoy que la chose à qui elle convient demeure toûjours la méme.

Si une puissance est pendue ou arrestée à une ligne flexible & sans poids, laquelle ligne soit attachée par un point à quelque arrest, en sorte qu'elle soustienne la puissance tirant sans empeschement contre cette ligne ; la puissance & la ligne prendront quelque position, en laquelle elles demeureront en repos, & la ligne sera droite par force ; soit icelle ligne appellée le pendant ou la ligne de direction de la puissance ; & le point par lequel la ligne est attachée à l'arrest, soit appellé le point d'appension, lequel pourra estre quelquefois au bras d'un levier, ou d'une balance, & lors la ligne droite ménée du centre de l'appuy du levier ou de la balance ; jusques au point d'appension, soit appellée la distance ou le bras de la puissance, laquelle distance ou bras nous supposons étre une ligne ferme considerée de soy son poids. D'avantage l'angle compris du bras de la puissance & de la ligne de direction, soit appellé l'angle de la puissance. Apres ces definitions nous posons pour principe qu'au levier, & à la balance, les puissances égales tirans par des bras égaux, & des angles de direction égaux, tireront également ; & si en cét estat elles tirent l'une contre l'autre, elles feront equilibre ; que si elles tirent ensemble ou de méme part, l'effet sera double. *1. Axiome.*

Si les puissances estans égales, & les angles de direction égaux, les bras sont inégaux, la puissance qui sera sur plus grand bras fera plus d'effet. Comme en la 1. figure le centre de la balance, ou du levier, estant A, si les bras A B, A C sont égaux, & les angles A B D, A C E égaux, les puissances égales D E, tireront également, & fairont equilibre ; de méme le bras A F estant égal à A B, l'angle A F G à l'angle A B D, & la puissance G à la puissance D, ces puissances G, D, tireront également, & pour ce qu'elles tirent de méme part, l'effet sera double : au contraire la puissance G & la puissance E, feront equilibre. Par le méme principe les puissances I, L, contrepeseront si étans égales les bras A K, A H sont égaux & les angles A H I, A K L aussi égaux. Il en sera de méme des puissances P, R, si le tout est disposé de méme. Et en ce cas nous ne mettons point d'autre difference entre les poids & les autres puissances, sinon que les poids tendent & aspirent tous vers le centre des choses pesantes ; & les puissances peuvent estre entenduës aspirer vers toutes les parties de l'Univers, avec autant, plus, ou moins de forces que les poids. Aussi les poids & leurs parties tirent par des lignes de direction qui toutes concourent à un méme point ; & les puissances & leurs parties peuvent étre

entenduës tirer de telle sorte que toutes les lignes de direction soient paralleles entre elles.

En second lieu nous posons qu une puissance & sa ligne de direction demeurans toûjours en méme position& le centre de la balance,ou du levier,de méme;quel que puisse etre le bras mene du centre de la balance à la ligne de direction;la puissance tirant de soy toûjours de méme sorte, fera toûiours méme effet. Comme en cette 2. figure le centre de la balance estant A,la puissance B & sa ligne de direction B F prolongée,tant que de besoin, à laquelle aboutissent les bras A C, A G, A F. En cét estat soit que la ligne B F soit liée au bras A F ou A C ou A G, ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction A F, nous supposons que cette puissance B sera toûjours un méme effet sur la balance : & si tirant par le bras A C elle fait equilibre avec la puissance D tirant par le bras A E ; lors qu'elle tirera par le bras A F, ou A G, elle fera encore equilibre avec la puissance D tirant par le bras A E. Ce principé quoy qu'il ne soit pas expressement dans les autheurs, est neantmoins usurpé tacitement pat tous ceux qui en ont eu affaire, & l'experience le confirme constamment. 2. Axiome.

En troisiéme lieu nous posons, que si les bras d'une balance ou d'un levier sont directement posez l'un à l'autre,& qu'estans égaux, ils soustienent des puissances égales desquelles les angles de direction soient droits, ces puissances peseront également sur le centre de la balance, soit qu'elles soient proche du méme centre, soit qu'elles en soient fort éloignées, soit que toutes deux soient ramassées au méme centre. Comme en la troisiéme figure la balance étant E D, le centre A, les bras égaux A D,A E soûtenans des puissances égales H,I,desquelles les angles de direction A D H, A E I soient droits; nous supposons que ces puissances I, H, peseront de méme sur le centre A que si elles étoient plus prés du méme centre sur les distances égales A B, A C, & encore de méme que si ces mémes puissances étoient ensemble pendües en A, ces angles de direction estans toûjours droits. 3. Axiome.

Ces principes posez, nous demonstrons facilement, imitans Archimede, que sur une balance droite, les puissances desquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction sont paralles entre elles, & perpendiculaires à la balance, contrepeseront & feront equilibre,quand les mémes puissances seront entre elles en proportion reciproque de leurs bras, ce que nous pensons vous étre aussi facile qu'à nous. En suite dequoy nous demonstrons cette proposition universelle, à laquelle nous butons. 1. Prop.

En toute balance ou levier si la proportion des puissances est reciproque à celle des lignes perpendiculaires du centre ou point de l'appuy, sur les lignes de direction des puissances, ces puissances tirans l'une contre l'autre feront equilibre : & tirans d'une méme part, elles feront un pareil effet ; c'est à dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance. Soit en la 4. figure le centre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C ; & soient premierement les lignes de direction B D, C E perpendiculaires aux bras A B,A C;par lesquelles lignes tirent les puissances DE,(lesquelles seront des poids si on veut) & qu'il y ait méme raison de la puissance D à la puissance E que du bras A C au bras A B, les puissances tirans l'une contre l'autre : je dis qu'elles feront equilibre sur la balance C A B. Car soit prolongé le bras C A jusques en F,en sorte que A F soit égale à A C, & soit consideree C A F comme une balance droite de laquelle le centre soit A : soient aussi imaginées deux puissances G, H,desquelles, & de toutes leurs parties, les lignes de direction soient paralleles à la ligne C E ; & que la puissance G soit égale à la puissance D, & la puissance H égale à la puissance E, l'une sçavoir G tirant sur le bras A F, & l'autre sçavoir H tirant sur le bras A C. Lors par la premiere proposition, les puissances G,H, feront equilibre sur la balance C A F. Mais par le 1. principe la puissance D sur le bras A B, fait le méme effet que la puissance G sur le bras A F ; partant la puissance D sur le bras A B fait equilibre avec la puissance H sur le bras A C ; & la puissance H tirant de meme que la puissance E sur 2. Prop.

le bras A C par le méme premier principe, la puissance D sur le bras A B, faira equilibre avec la puissance E sur le bras A C. Maintenant en la 5. fig. soit le centre de la balance A; les bras A B, A C; les lignes de direction B D, C E qui ne soint pas perpendiculaires aux mémes bras; & les puissances D, E, tirans par les mémes lignes de direction; sur lesquelles lignes soint ménées des perpendiculaires du centre A, sçavoir A F sur B D & A G sur E C; & que comme la ligne A F est à A G ainsi soit la puissance E à la puissance D, lesquelles puissances tirent l'une contre l'autre, je dis qu'elles fairont equilibré sur la balance C A B. Car soint imaginées les lignes A F, A G comme les deux bras d'une balance G A F, sur lesquels tirent les puissances D, E, par les lignes de direction F D, G E, ces puissances fairont equilibre par la premiere partie de cette 2. prop. Mais par le 2. principe la puissance D sur le bras A F fait le méme effet que sur le bras A B; & la puissance E sur le bras A G fait le méme effet que sur le bras A C; partant la puissance D sur le bras A B, fait equilibre avec la puissance E sur le bras A C. Il y a plusieurs cas suivant les cheutes des perpendiculaires, mais il vous sera facile de voir que tous n'ont qu'une méme demonstration. Il est aussi facile de demonstrer que si les puissances tirent de méme part, elles fairont méme effet l'une que l'autre, & l'effet des deux ensemble sera double de celuy d'une seule.

J'attens vôtre jugement sur cette demonstration, & si vous l'approuvez nous communiquerons en suite des consequences qui en dépendent. J'ay trouvé la demonstration de la somme des quarrez de deux costez rationaux commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des costez, excedant d'une figure quarrée : mais puis que vous l'avez aussi trouvée, je ne vous diray ici que mon principal fondement, qui est que de deux nombres quelconques, la somme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du second, & deux fois le produit des deux nombres, n'est pas un nombre quarré, d'autant que prenant les moindres nombres de leur raison, un nombre simplement pris n'est pas quarré. Si nous avons tous deux un méme moyen, cecy suffit, si vous en avez un autre, ce que vous reconnoistrez par ce discours, vous me fairez faveur de me l'apprendre, & moy je vous écriray le mien tout au long, si vous le desirez.

J'ay aussi trouvé la demonstration de vôtre conoide, & celle de vôtre parabole solide, & en consequence, celles d'une infinité d'autres pareilles quarre-quarrées, quarre-solides, &c. J'ay trouvé les tangentes de toutes ces figures : par exemple en la parabole solide la portion de l'axe, prise entre la tangente & le sommet, est double de la portion du méme axe, prise entre le sommet & la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe. J'ay par le méme moyen quarré la parabole geometriquement autrement qu'Archimede. Et je me trompe fort si je n'ay rencontré le méme moyen que vous, me servant des lignes paralleles à l'axe, & des portions de ces lignes, prises entre les paraboles & la ligne qui touche les mémes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivent en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrez ou des nombres cubes, &c. Or la somme des quarrez est toûjours plus que le tiers du cube qui a pour costé le costé du plus grand quarré : & la méme somme des quarrez, le plus grand estant osté est moindre que le tiers du méme cube. La somme des cubes plus que le quart du quarre-quarré; & le plus grand cube osté, moins que le quart, &c. Si par ce discours vous reconnoissez que ce n'est pas vôtre moyen, j'en seray d'autant plus réjoüi pour ce que nous en aurons deux, & vous me fairez la faveur de m'envoyer le vôtre faisant le méme de ma part.

Pour les tangentes de la conchoide, je les ay considerées il y a long-temps, comme étans determinations d'equations quarre-quarrées. Sur ce sujet il y a deux points en la conchoide, par lesquels on ne peut mener des tangentes, je vous prie de les considerer, & vous trouverez une admirable proprieté d'angles au sommet l'un de l'autre à la section d'une ligne droite & de la conchoide.

J'estime vos propositions des nombres & celle du lieu plan fort difficiles ce que je sçauray mieux quand j'auray eu le loisir de les considerer comme aussi les centres de gravité des figures susdites tant planes que solides ; n'estant pas resolu pourtant de m'obstiner apres : car j'aimeray mieux tenir de vous ce que vous en aurez, si vous l'avez agreable. Je vous prie pourtant de me mander si le centre de gravité de vôtre demiconoide n'est pas ce point ou l'axe est divisé, de sorte que l'un des segments est à l'autre comme 11. à 4. pour ce qu un leger raisonnement, & non encor bien consideré m'a semblé me mener à cette raison.

Une autre fois je vous pourray mander de nos propositions ainsi que vous le desirez: pour cette heure que je n'employe à écrire cecy qu'un temps dérobé, je vous envoyeray seulement celle-cy. De deux cones droits égaux & isoperimetres estans données les bases inégales, ou les hauteurs inégales, trouver les cones. Quand je dis isoperimetres, j'entens les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez. Vous en aurez la solution quand il vous plairra, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous méme, & je vous l'aurois envoyé des maintenant, n'estoit que je croy que vous desirez d'avoir le plaisir d'y penser. Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire, je demeureray, &c.

Objecta à D. de Fermat,

Adversùs propositionem Mechanicam D. de Roberval.

SI vera esset propositio Mechanica D. de Roberval, in vecte quolibet, pondera perpendiculis à centro vectis in lineas directionum demissis esse reciprocè proportionalia ad astruendam quietem, non posset subsistere proportio gravis ad potentiam in plano inclinato, quam in libello suo tradidit. Hoc perspicuè demonstramus.

In 1. figura, esto punctum in superficie telluris N, centrum terræ H, junctâ N H, ducatur A N G F, perpendicularis ipsi H N, quam quidem A N G F, ii qui sunt in puncto N, vocant parallelam horizonti. Exponantur sphæræ quarum centra B, C, D, quæ tangant rectam sivè planum per A N G F, in punctis N, G, F.

Patet primùm Sphæram B, à minima potentia moveri, idque D. de Roberval non diffitetur, & in puncto N collocatam, manere, sed in nullo alio totius plani puncto idem accidit. Perficiatur figura ut hic vides. Recta H G, connectens punctum contactus G, & centrum terræ H, ad rectam C G, facit angulum obtusum ideoque sphæra C, ad partes G N, movebitur. Idem de sphæra D. Sit igitur potentia in Z, retinens sphæram C, per motum rectæ A N G F, parallelum aut quod idem est per rectam Z C. Intelligitur vectis cujus centrum fixum G, ducatur in H C, perpendicularis G C Sphæræ C, motus naturalis est per rectam C H. Motus retinens per C Z ad quam perpendicularis est G C. Ergo ex suppositis D. de Roberval est reciprocè ut recta G I, ad rectam G C, ita potentia retinens in Z ad sphæram C, quod erat demonstrandum. In sphæra autem D, major requiretur potentia ad retinendum, & quo magis distabit à puncto N, eò majore potentia opus erit, quod est mirabile.

Ex suppositione autem D. de Roberval numquam in eodem plano variat proportio, quod quam longe abeat à veritate ipse viderit.

Sit centrum terræ B, Planum inclinatum A C D C, in punctis A & C, eamdem potentiam retinere, poterat fortasse non incongruum videri D. de Roberval. Sed ducto perpendiculo E D, cum in puncto D sit quies, & minima potentia retineat, qua ratione constabit ipsius propositio?

In quolibet autem plano habet locum nostra demonstratio. Omne quippe planum alicui horizonti invenietur parallelum.

Hac propositione evertitur demonstratio Domini de Roberval & brevissimâ viâ ad ipsius hypotheses nova proportio detegitur.

Secundam figuram addideramus, qua judicium nostrum de ipsius ultima propositione prodere sperabamus. Sed non suppetit tempus.

Nova in Mechanicis Theoremata D. de Fermat.

FUndamenta Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedem fueram dudum suspicatus, supposuisse enim motus gravium descendentium inter se parallelos patet, nec vero absque hac hypothesi constare possunt ipsius demonstrationes : Non inficior quidem hypothesim hanc ad sensum proximè accommodari, quippe propter magnam a centro terræ distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli non secus ac radij solares : sed veritatem intimam & accuratam quærentibus, hæc non satisfaciunt. Generalis nempe vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda & astruenda ideoque nova in mechanicis fundamenta è veris & proximis principiis accersenda : Hujus novæ scientiæ propositiones tantum exhibemus, demonstrationes cum libuerit, tradituri.

Duplex igitur vectium genus fingimus aut potius consideramus unum cujus motus rectus tantùm est non circularis, alterum cujus extrema describunt circulos, de secundo hoc quæsitum tantùm apud veteres ; primum quod longè videtur simplicius, nè agnoverunt quidem.

Singula exemplis illustramus & prioris quidem centrum idem est cum centro terræ, posterioris centrum extra centrum terræ necessariò debet collocari.

Sit igitur in sequenti figura centrum terræ punctum A, & intelligatur recta C B, transire per centrum A, imò & ipsa A B, intelligatur esse vectis & in punctis B & C, collocentur gravia B & C, sitque pondus B, ad pondus C, ut recta C A, ad rectam A B, aio vectem CB, mansurum & æquilibrium in hoc casu constituturum. Si vero deminuatur tantisper grave B, movebitur vectis in rectum per centrum A ad partes C, donec pondera distantiis à centro sint reciprocè proportionalia. Hæc est prima propositio cujus respectu terra ipsa magnus vectis dici potest ad imitationem Gilberti qui eam magnum magnetem vocat.

Hoc posito, mirabilius quiddam proponimus, gravia nempe eò facilius tolli à potentia in superficie terræ aut alibi constituta quò propiora fuerint centro terræ.

Sit centrum terræ A punctum C, extra centrum jungatur recta C A, in qua sumpto puncto B, collocetur grave in B. Si intelligamus grave B, per filum aut axem C B, suspensum, detinebitur à potentia in C, collocata cujus proportio sit ad pondus B, ut recta A B, ad rectam A C.

Indeque facillimè deducitur & demonstratur gravia in centro non ponderare, cujus rei demonstrationem hactenus quæsitam jam novimus.

Secundùm vectium genus Archimedæum dici potest. Sed reciproca distantiarum cum ponderibus proportio (quam in vecte simplici demonstravimus) in hoc habere locum non potest, nec ideò subsistere sexta & septima Archimedis propositio.

Ita igitur confidenter pronuntiamus & vectem generaliter sive brachia, sive in directum, sive parallela horisonti, sive etiam angulum constituant, consideramus.

Una quippe demonstratione totum evincimus. Sit vectis extra centrum terræ D B C, cujus centrum B, Brachia B D, & B C, centrum terræ A, jungantur rectæ D A, B A, C A, &

in punctis B & C, collocentur gravia, sitque proportio gravis D, ad grave C, composita ex proportione rectæ D A, ad rectam C A, & reciprocè ex angulo C A B ad angulum B A D. Aio vectem B D C à puncto B suspensum mansurum & æquilibrium constitutururum.

Hanc propositionem sicut & reliquas verissimas asseveramus, & cum libuerit, demonstrationibus ex puriore Geometria & Physica derivatis confirmabimus.

Inde patet corruere omnino veterum de centris gravitatum definitiones, nullum quippe corpus præter Sphæram potest reperiri in quo punctum reperiatur à quo grave extra centrum terræ suspensum, servet eam quam in principio habuerit positionem.

Definietur ergo deinceps centrum gravitatis cujusque corporis, punctum intra corpus positum, quod si cohæreat centro terræ, corpus eam servabit quam in principio habuerit positionem: eo enim solum casu habent locum centra gravitatis.

Demonstrabitur etiam & refelletur error Ubaldi & aliorum qui existimant libræ brachia licet non sint parallela horizonti æquilibrium tamen constitutura.

Sit centrum terræ B, semidiameter B A, portio alterius semidiametri B C, & fiat ut A B, ad B C, ita pondus appensum in C ad pondus appensum in A. Aio pondera A C non moveri, sed fieri æquilibrium, hæc autem propositio probatu facillima est vestigiis Archimedis insistendo. Et, si negetur, statim demonstrabitur.

Hoc supposito, propositionem sanè mirabilem inde deducimus. Ponatur grave in puncto N, inter puncta A & B, & fiat ut A B ad B N ita pondus N ad potentiam R. Aio pondus N juncto axe A N à potentia R in puncto A collocata detineri, & si minimùm augeatur potentia R, sursum tolli, ideoque quò propius pondus accedit ad centrum terræ, minorem potentiam ad tollendum illud requiri.

Hæc est, ni fallor, propositio quam Beaugrandus in sua Geostatica demonstrat; nos eam hac ratione, quæ sequitur, demonstramus.

Propositio Geostatica D. de Fermat.

Suppositis & concessis quibus in demonstratione utimur, ex præcedente propositione, & ex communibus notionibus desumptis.

Sit centrum terræ C, semidiameter C A in qua sumatur punctum B, in puncto autem B sit quodvis grave appensum. Fiat autem ut recta C A, ad rectam C B, ita pondus in B appensum ad potentiam aliquam ut R. Aio grave B à potentia R in puncto A sustineri, & si augeatur quantumlibet potentia R, pondus B ab hujusmodi auctâ potentiâ in puncto A collocatâ sursum moveri, producatur enim A C in D, & sit C D, æqualis C B. Et in D collocetur pondus ponderi B æquale. Corporis igitur ex duobus gravibus B & D compositi centrum gravitatis est C, ideoque si à puncto A auferatur potentia R, cum recta B A, nihil ponderet, erunt pondera B & D in æquilibrio & manebunt. Si autem in A, collocetur pondus deorsum tendens potentiæ R sursum moventi æquale, idem est ac si à puncto A dematur potentia R, nam quantum potentia tollit tantumdem pondus deprimit. Collocetur igitur hujusmodi pondus in A, corpus igitur compositum ex potentia R collocata in A, & sursum movente, ex pondere A, deorsum tendente, & ex gravibus B & D erit in æquilibrio, aut, si mavis, non movebitur. Cum autem grave D, sit æquale gravi B & recta C D rectæ C B, erit ut A C ad C D; ita A C ad C B, & ut pondus B ad potentiam R in A collocatam, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens (quod ipsi R potentiæ æquale posuimus) est autem ex hypothesi ut recta A C ad C B, ita pondus B ad potentiam R in A collocatam. Erit igitur ut A C ad C D, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens. Cum igitur distantiæ ponderibus sint reciprocè proportionales

pondus in A deorsum tendens ponderi D æquiponderabit. Si verò ab æquiponderantibus æquiponderantia auferantur, reliqua æquiponderabunt. Ergo si ab æquilibrio ex potentia R in A collocata & sursum movente, ex pondere in A deorsum tendente & ponderibus B & D composito, auferatur æquilibrium ex ponderibus A & D compositum, reliqua æquiponderabunt, aut potiùs non movebuntur. Auferantur igitur pondus A & pondus A D. Remanebit potentia R in A collocata, & pondus B. Quod proinde potentia R detinebit. Ideoque si minimâ augeatur vi, sursum tollit G E D.

Propositio D. de Fermat circa parabolen.

PRoposui per data 4. puncta parabolen describere. Duplex est casus, utrique lemma sequens præmittendum.

Sit parabole in 1. fig. E C B A D cujus diameter A F detur positione, dentur etiam duo puncta B & C, per quæ transit parabole, dentur denique anguli applicatarum ad diametrum A F. Aio parabolen positione dari. Applicentur ordinatim B N & C M, à puncto dato B in A F, positione datam ducitur B N in dato angulo (positum quippe est dari angulum applicatarum) ergo datur punctum N, similiter datur punctum M & rectæ B N, C M positione & magnitudine: Ex natura paraboles est ut quadratum C N ad quadratum B N, ita M A ad N A, si ponas A esse verticem paraboles sive extremum diametri. Ergo datur ratio M A ad N A & dividendo datur ratio M N ad N A, datur autem recta M N, quia duo puncta M, N dantur, datur igitur N A & punctum A. Si fiat ut A N data ad N B datam, ita N B ad Z, dabitur Z rectum paraboles latus. Dato igitur vertice A, Z recto latere, A F diametro positione, angulo applicatarum, datur positione parabole, ex 52. 1. Apoll.

Hoc supposito facillimè construitur primus casus in 2. fig. in qua dentur 4. puncta D, B, C, F, quæ si jungas per rectas, B C, C F, F D, D B, vel neutra oppositarum erit alteri parallela, vel ut in hoc casu erit B C verbi gratia parallela D F. Bifariam utraque dividatur in punctis I & E & sit factum, ergo juncta I E erit diameter paraboles cum æquidistantes bifariam dividat, dantur autem puncta I & E, ergo I E positione datur & angulus D E I. Cum igitur diameter I E positione detur, detur etiam angulus applicatarum & duo puncta B & D per quæ transit parabole, dabitur positione parabole DBACF.

In 2. casu major est difficultas, cum neutra rectarum duo ex punctis datis conjungentium alteri est æquidistans.

In 3. fig. sint data 4. puncta X, N, D, R, quæ per rectas X R, R D, D N, N X, conjungantur, & neutra oppositarum sit alteri æquidistans. Ponatur jam factum esse, & descriptam parabolen X A N D B R, proposito satisfacientem. Concurrant productæ X N, R D, in puncto V, & bifariam divisis X N, R D, in punctis M & C, ducantur ad ipsas diametri M A, C B, occurrentes parabolæ in punctis A, & B, à quibus rectæ I A S, S B ipsis X V, V R, ducantur æquidistantes, & concurrant in puncto S. Juncta A B bifariam dividatur in P & jungatur S P, his ita constructis patet, cum per verticem diametri M A ducatur I A S, æquidistans applicatæ X N, rectam I A S tangere parabolen in A, probabitur similiter rectam S B tangere eamdem parabolen in B, ergo per 16. 3. Apoll. erit ut rectangulum X V N ad rectangulum R V D, ita quadratum A S ad quadratum SB. Datur autem ratio rectanguli X V N ad rectangulum RVD, cum dentur 4. puncta X N D R, ergo datur ratio quadrati A S ad quadratum S B, ideoque rectæ A S ad rectam S B. Datur autem angulus A S B, quia propter parallelas æquatur angulo X V R, dato. Ergo in triangulo A SB datur angulus ad verticem S & ratio laterum A S, S B, ideoque triangulum A S B datur specie, igitur datur angulus S A B & ratio S A ad AB, cum autem

autem AP sit dimidia AB, datur etiam ratio SA ad AP, in triangulo igitur S A P datur angulus ad A, & ratio laterum SA, AP, datur igitur specie & angulus P S A datur. Hoc posito cum recta SP rectam AB puncta contactuum conjungentem bifariam dividat, erit diameter paraboles, ex 29. 2. Apoll. in parabolâ autem omnes diametri sunt inter se æquidistantes, ergo diameter M A rectæ S P æquidistabit, ideoque angulus I A M, æquabitur angulo AS P, probavimus autem dari angulum A S P, ergo dabitur angulus I A M & ipsi alternus propter parallelas N M A, datur autem punctum N quia rectam N X positione & magnitudine datam bifariam dividit. Ergo datur diameter M A positione, datur etiam angulus applicatarum A M N, & dantur duo puncta N & D per quæ transit parabole. Datur igitur parabole positione ex lemmate, & est facilis ab analysi ad synthesim regressus.

Patet autem duas parabolas in hoc secundo casu propositum adimplere, concurrent enim rectæ D N & XR, quas posuimus non esse parallelas : hoc casu eâdem argumentatione nova construetur parabole proposito satisfaciens.

Lettre de M. de Fermat au R. Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes.

MON REVEREND PERE,

Puis que j'ay esté assez heureux pour vous oster l'opinion que vous aviez eüe que j'eusse suivi en ma proposition le méme raisonnement que Monsieur de Beaugrand, j'espere qu'avec la méme facilité je vous osteray tous les autres scrupules. 1. Vous avez creu que ma proposition étoit la méme que celle de M. de Beaugrand & ce par deux raisons, l'une que je l'avois écrit lors que je l'envoyay à Mr. de Carcavi; l'autre qu'elle semble conclurre la méme chose. Pour le premier, je vous répons que lors que j'envoyay ladite proposition, je n'avois pas veu encore le livre de M. de Beaugrand, & n'avois sçeu si ce n'est qu'il écrivoit du divers poids des graves secundùm varia à terræ centro intervalla, si bien que la dessus j'imagina la proposition que vous avez veuë, & creus que peut-étre ce seroit la méme que celle de M. de Beaugrand, & l'écrivis ainsi à mondit sieur de Carcavi, mais depuis ayant veu le livre de Mr. de Beaugrand, j'ay trouvé que son opinion est differente de la mienne en ce qu'il suppose que le grave en soy, se rend ou plus pesant ou plus leger selon l'éloignement ou l'apprroche du centre, & moy je soûtiens (en quoy je répondray à vôtre seconde raison) qu'en soy il ne change point de poids, mais qu'il est tiré avec plus ou avec moins de force, ce qui est bien different du reste.

Soit le centre de la terre C, le grave B au point B & le point D dans la superficie, Mr. de Beaugrand tient que si on pese le grave B dans le point B on le trouvera plus leger que si on le pese au point D. Et moy je dis que si on pese le grave B dans le point B, on le trouvera de méme poids que s'il étoit pesé au point D; & qu'en tout cas quand bien cela ne seroit pas (car ma proposition ne depend nullement de la sienne) que le grave B sera soûtenu plus aisement par une puissance qui sera au point D, que par une autre puissance qui en sera plus proche, & en la proportion que j'ay assignée. Vous ne devez pas doubter que ma demonstration ne conclüe parfaitement, bien qu'il semble que Monsieur de Roberval ne l'a pas trouvée precise. Je vous puis donc asseurer que toutes les propositions que j'ay mises dans mon écrit sont parfaitement vrayes, & de cela je n'en veux pas étre creu que lors que j'auray mis par écrit toutes les demonstrations sur cette matiere. Je suis si peu ambitieux que si j'avois trouvé erreur en ce que je vous ay écrit je ne ferois nulle difficulté de l'advoüer. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.

Du 4. Novembre 1636.

MONSIEUR,

Me reservant à vous écrire une autre fois les defauts que j'ay trouvé dans vôtre demonstration & dans vôtre Livre imprimé, que j'espere vous faire advoüer par vos propres maximes, je me contenteray de répondre presentement aux autres points de vôtre Lettre, & premierement vous sçaurez que nous avons concouru au méme medium sur le sujet de la somme des deux quarrez rationaux commensurables en longueur appliquée au double de la somme des côtez, excedant d'une figure quarrée. Vous vous estes servy aussi d'un méme medium que moy en la quadrature des paraboles solides quarre-quarrez,& à l'infini ; mais vous supposez une chose vraye,de laquelle vous n'avez pas peut-étre la demonstration précise, qui est que la somme des quarrez est plus que le tiers du cube, qui a pour costé le costé du plus grand quarré la somme des cubes plus que le quart du quarre-quarré la somme des quarre-quarrez plus qu'un cinquiéme du quarrecube, &c. Or pour demonstrer cela generalement, il faut étant donné un nombre, in progressione naturali, trouver la somme, non seulement de tous les quarrez & cubes,ce que les Autheurs qui ont écrit ont déja fait, mais encore la somme des quarre-quarrez quarre-cubes, &c. ce que personne que je sçache n'a encore trouvé, & pourtant cette connoissance est belle & de grand usage, & n'est pas des plus aisées, j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine.

En voicy un exemple. Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, & à producto demas summam quadratorum à singulis fiet summa quadrato-quadratorum quintupla. Il semble que Bachet, dans son traitté de numeris multangulis, n'a pas voulu tâter ces questions apres avoir fait celle des quarrez & des cubes : je seray bien-aise que vous vous exerciez pour trouver la methode generale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas je vous offre tout ce que j'y ay fait, qui comprend entierement tout ce qui se peut dire sur cette matiere. Voicy cependant une tres-belle proposition, qui peut-étre vous y servira, au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une regle que j'ay trouvée pour donner la somme non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet & les autres, mais encore des pyramides, triangulo-triangulorum, &c. à l'infini, voicy la proposition.

Ultimum latus in latus proximè majus facit duplum trianguli.

Ultimum latus in triangulum lateris proximè majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proximè majoris facit quadruplum triangulo-trianguli.

Et eo in infinitum progressu.

Toutes ces propositions, quoy que belles de soy,m'ont servi à trouver les quadratures, que je suis bien-aise que vous estimiez.

Je voudrois avoir assez de loisir pour vous envoyer les propositions des nombres que vous trouvés si difficiles, elles le sont en effet, méme Tartaglia avoit creu qu'elles n'estoient point trouvables par art. J'en ay envoyé la construction au Pere Mersenne. Il vous la communiquera si vous la luy demandez, je vous envoyeray aussi une autre-fois le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures, avec la methode generale pour le trouver ; vous sçavez cependant que celuy du demy-conoide divise l'axe en proportion de 11. a 5. non pas de 11. à quatre, comme vous aviez creu, &

que celuy des nouvelles paraboles divise l'axe en proportion pareille à celle du parallelogramme, qui a pour hauteur l'axe, & pour baze celle de la figure à la figure, ou pour mieux dire le diametre de toute parabole est divisé en tel point de son diametre par le centre de gravité en sorte que le segment d'en bas est à celuy d'enhaut, comme la figure au parallelogramme de méme baze & de méme hauteur,

Puis que vous avez trouvé la demonstration de toutes mes propositions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Pere Mersenne de vous donner mes nouvelles Helices, desquelles les demonstrations vous seront aussi aisées que celles du conoïde & des paraboles, il m'écrit qu'on doûte de delà de leur verité, Vous la luy confirmerez, s'il vous plaît, & desabuserez Monsieur de ..... qui semble ne les avoir pas creües, mais il n'en faut pas demeurer là, car pour suppleér tout ce qui semble manquer dans l'Archimede. Exponatur parabole, A C D F cujus axis D E, basis A F, C B parallela D E & ideo perpendicularis ipsi AF. Circa rectam DE fixam figura ADE, conversa constituit conoïdem Archimedeum; circa AE fixam constituit nostrum conoïdem, sed si figura ACB, circa A B, fixam convertatur constituitur portio nostri conoïdis, si autem circa CB fixam fiat conversio quæritur proportio novi istius conoïdis ad conum ejusdem basis & altitudinis, hoc autem etiam perfecimus. Imò mirabilius quiddam invenimus, Ellipsioidem cui si conum æqualem inveneris dabimus circuli quadrationem. Sed hæc aliàs. Vôtre question des cones est si aisée qu'il seroit inutile de vous en écrire la solution.

Pour les tangentes de la Conchoïde j'ay peur que vous aurez equivoqué; car voicy ma proposition qui n'exclud aucun point, laquelle j'ay coppié sans la verifier sur mon manuscrit, peut-étre que c'est moy qui auray failli, je vous l'écriray la premiere fois.

Esto Conchoïs A B C, cujus polus F, intervallum H A & in ea datum punctum B, primùm asserimus eam in interiora convexam repræsentandam, licèt contrarium Pappo & Eutocio visum fuerit, deinde tangentem ita ducimus. Jungatur FIB & perpendicularis B D, demittatur rectangulum B F I unà cum quadrato BD ad rectam B D, applicentur & faciant latitudinem D N, fiat ut H D ad D N, ita B D ad D I, juncta Y B tanget Conchoïdem. J'attends vôtre réponse, & suis, &c.

A Monsieur de Roberval.

Du 7. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Apres vous avoir asseuré, que je n'ay jamais songé de soûtenir une opinion contre mon sentiment, & que je serois ravi que vôtre proposition mechanique feut vraye, afin que nous ne fussions plus en peine de sonder la nature par cét endroit: je m'en remettray du surplus à la lettre que j'écris à Monsieur de Carcavi, à laquelle j'adjoûteray seulement, que le dernier des principes dont vous vous servez pour l'établissement de vôtre proposition ne me semble du tout point admissible, & que sans aucun esprit de contradiction j'estime que pour établir la proportion des poids qui se meuvent librement on ne doit pas avoir recours aux forces mouvantes, & qu'au contraire les poids libres doivent servir de regle à tous les autres mouvemens violens, & c'est en quoy je trouve que vôtre principe est défectueux, outre qu'il est apparemment faux, puisque celuy dont je me sers en sa place ne peut, ce me semble, étre contredit, & de cela j'en fais juge qui que ce soit.

Sit vectis B D C, cujus medium D, centrum terræ A, sit autem recta D A vecti perpendicularis. Et sint æqualia pondera B & C ad centrum terræ per rectas B A, C A,

naturaliter annuentia, suspendatur autem vectis à puncto D, & à quavis potentia retineatur. Aio idem ponderare B & C corpora ita constituta, ac si ambo in puncto D ab eadem potentia detineantur.

Car puis que la ligne B C est sans poids, & que la puissance qui est en D, abstrahit à centro, ou au contraire les poids B & C, sive sint in punctis B & C, sive in puncto D, vergunt ad centrum motu opposito, il s'ensuit clairement que la puissance qui retiendra les poids aux points B & C, les retiendra aussi en D, & viceversâ.

Et n'importe d'alleguer qu'il semble que le mouvement qui se fait par des puissances paralleles à la ligne D A est aussi bien contraire au mouvement qui se fait sursum par la puissance qui retient en D. Car primò, il n'est pas si probable de dire qu'un mouvement violent est contraire à un autre mouvement violent, comme de dire qu'un mouvement violent est contraire au mouvement naturel. 2. Le mouvement qui se fait sur les lignes paralleles à D A, se fera sur des plans inclinez à l'horizon, & duquel la proportion sera plus inconnüe que le principe, de sorte que ou il nous faut advoüer la verité de mon principe, ou demonstrer le vôtre. Au premier cas je vous demonstreray ma proposition de mon second levier par vos propres maximes. J'estime que vous aurez grande difficulté au second.

Vous pouvez encore répondre qu'il n'est pas icy question des mouvemens qui se font sur des plans inclinez à l'Horizon, parce que vous supposez, & je l'accorde aussi qu'en tout mouvement si la force qui retient tire à l'opposite, l'equilibre se fera lors qu'elle sera égale à la force qui tiré au contraire, & qu'ainsi la puissance en D tirant à l'opposite l'effet de vôtre principe s'en ensuivra; mais je réponds que vôtre réponse seroit bonne si la puissance qui est en D étoit divisée & placée aux points B & C, & qu'elle tirât au contraire par les mémes lignes, que les forces, que vous supposez en C & B, meuvent. Mais cela n'estant pas, excusez mon incredulité si elle ne se rend pas à vos raisons, lesquelles je souhaiterois plus fortes pour pouvoir librement me dedire de tout ce que j'ay fait sur ce sujet, vous protestant que jamais homme n'a esté plus docile que moy, & que lors que je reconnoistray mes fautes, je les publieray le premier avec toute franchise. J'ay esté bien-aise de voir vôtre remarque sur la Conchoïde, & vous prie de m'en donner la demonstration, & vous souvenir que lors que je vous écrivis sur ce sujet, je le fis en doûtant, & sans examiner l'écrit que je transcrivis d'un Livre où je l'avois mis il y avoit quatre ans; la construction pourtant convient au probleme & au point méme de vôtre proposition si elle est vraye, ce que j'atens que vous me confirmiez, je vous prie aussi me faire sçavoir vôtre sentiment sur les autres propositions que je vous ay envoyées, & vôtre réponse sur les autres points de ma derniere Lettre, & me croire toûjours, &c.

A Monsieur de Roberval à Paris.

Du 16. Decembre 1636.

MONSIEUR,

Je viens de recevoir vôtre Lettre du 29. Novembre, pour réponse à laquelle je vous diray que de la methode que vous avez trouvée pour donner la somme des quarrez-cubes & quarrequarrez je ne voy point qu'on en puisse tirer une regle generale pour l'invention de la somme omnium potestatum in infinitum, ce qui est requis à la solution de mon probleme, car vous dites seulement qu'il sera aisé de trouver les autres apres avoir veu celles dont vous baillés les exemples, mais je demande une methode generale qui serve ad omnes, potestates, comme Viete a trouvé celles des sections angulaires, vous y songerés s'il vous plaît, & j'en écriray cependant l'invention & demonstration que vous

verrez lors qu'il vous plairra. Pour ce qui eſt des nombres, & de leurs parties aliquotes j'ay trouvé une methode generale pour ſoudre toutes les queſtions par algebre, dequoy j'ay fait deſſein d'écrire un petit traité. Je croy que vous aurez maintenant veu la conſtruction des deux que j'ay envoyé au Pere Merſenne ; car il m'écrit qu'il vous les baillera, toutes ces queſtions ſont tres difficiles, comme vous ſçavez, & n'ont eſté traitées par perſonne, j'ay eſté bien aiſe d'étre confirmé par vôtre lettre en l'opinion que j'avois déja conceüe de Monſieur de .... il eſt pourtant vray qu'il doit avoir grande experience dans les nombres, car luy ayant par l'entremiſe du Pere Merſenne propoſé une queſtion que perſonne de ceux à qui je l'avois propoſée n'avoit encore peu ſoudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui ſatisfont à la queſtion, ſans pourtant expliquer ſa conſtruction, la queſtion eſt. Invenire tria triangula rectangula numero, quorum areæ conſtituant tria latera trianguli rectanguli numero, ſingulæ nempe areæ ſingulis lateribus ſint æquales : je vous advoüeray que ce probleme me donne beaucoup plus de peine qu'à Monſieur de .... Il eſt vray que les nombres que j'ay trouvé ſont differents des ſiens, & que peut-étre ay-je tenu un chemin plus difficile, comme vous ſçavez que ces queſtions ont infinies ſolutions, peut-étre ſerez vous de mon advis ſi vous eſſayez de ſatisfaire à la propoſition.

Vous verrez auſſi mes ſpirales, deſquelles la demonſtration vous ſera connüe tout auſſi-tôt ; car elle eſt pareille à celle des nouvelles figures que j'ay quarrées, ou auſquelles j'ay trouvé des cones égaux, & vous m'advoüerez que ces propoſitions n'illuſtrent pas peu la Geometrie.

Si Monſieur de Beaugrand n'a pas encore trouvé la demonſtration de ces queſtions vous m'obligerez de luy en faire part, je luy ay écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures par une methode particuliere, qui ne ſuppoſe point la connoiſſance de la quadrature, ce qui vous ſemblera merveilleux juſques à ce que vous l'aurez veu, il eſt vray que je luy ay envoyé l'analyſe ſeulement, & non pas la compoſition que je vous éclairciray une autre fois, parce qu'elle a ſes difficultez & ne paroît pas d'abord par cette voye. J'ay trouvé le centre de gravité de la parabole ſans preſuppoſer la quadrature, comme a fait Archimede, & ainſi on en peut tirer la quadrature par un ſimple corollaire, toutes ces propoſitions, enſemble celles des lieux plans, ſolides, & ad ſuperficiem, que j'ay achevées, & celles encore des parties aliquotes des nombres dépendent de la methode dont Monſieur Deſpagnet ne vous a peu faire voir qu'un ſeul cas, parce que depuis que je n'ay eu l'honneur de le voir je l'ay beaucoup étenduë & changée. Les tangentes des lignes courbes dépendent auſſi de là, ſur lequel ſujet je vous propoſeray de trouver une tangente à un point donné en la ſeconde Conchoïde de Nicomedes.

Au reſte je ſuis bien aiſe que vous ayez trouvé la demonſtration, comme vous dites ; de ce que ſuppoſé qu'aux paraboles les ſegmens de l'axe ſont entre eux comme les parallelogrammes aux mémes paraboles, il ſera vray auſſi qu'eſtans tournez ſur leurs axes, les centres des ſolides ſeront où l'axe eſt diviſé en raiſon comme les Cylindres aux ſolides ; car par la voye dont j'ay envoyé un exemple à Monſieur de Beaugrand, & que je mettray au long une autre fois, j'ay trouvé la demonſtration de l'antecedent & de celle du conſequent que vous m'envoyerez, s'il vous plaît, j'en tireray la proportion des ſolides paraboliques à leurs cones, qu'il ſeroit mal-aiſé de trouver autrement, car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent poſt quadrata alternatim, comme quarre-quarrez, cubocubes, &c. dequoy vous baillez l'exemple au premier; mais in parabolis cubicis, quadratocubicis & ſic alternis in infinitum methodus qua uſi ſumus non dat proportionem conoïdum ad conos, ex noſtra autem methodo in omnibus omnino conoïdibus invenimus centrum gravitatis, ergo ex tua propoſitione dabitur proportio eorum ad conos. Je l'attends donc avec impatience, puis qu'elle doit ſervir à cét uſage, ſi ce n'eſt que vous ayez trouvé la proportion des conoïdes cubiques quadrato-cubiques, &c. à leur cones, ce que vôtre lettre ſemble marquer, auquel cas je vous ſupplie m'envoyer leſdites proportions.

Ce n'eſt pas que je doûte de la verité de vôtre propoſition, mais permettez-moy de vous dire que je me ſuis défié que vous en euſſiez trouvé la demonſtration & que j'ay crû ſeulement que vous en avez fait l'experience aux conoïdes paraboliques des quarre-quarrez, cubocubes, &c. alternis, mais la connoiſſance que j'ay de vôtre ſçavoir fait que j'eſpere que vous me détromperez.

Pour ce qui eſt de la proportion du ſolide qui ſe fait ſur un diametre de la parabole parallele à l'axe ma conſtruction eſt differente de la vôtre. Il ſeroit inutile de l'adjoûter, puis qu'elles concluënt toutes deux.

Je me trouve obligé d'adjoûter un mot touchant vôtre propoſition mechanique parce que le Pere Merſenne m'écrit qu'enfin j'ay acquieſſé à vôtre opinion, ce que pourtant je ne ſçaurois faire par les raiſons que vous allez voir, & vous puis aſſûrer que jamais je ne fus mieux confirmé en la propoſition de mon ſecond levier que je le ſuis maintenant, car pour celle du premier il la faut établir par de nouveaux principes, puiſque vous avez nié ceux que j'eſtimois ſi clairs.

Si vôtre principe duquel je vous ay déja écrit par ma derniere lettre eſt vray, il s'enſuit manifeſtement qu'un méme corps approchant du centre de la terre changera ſon poids. In ſecunda figura ſit vectis C A B, cujus medium A, cum centro terræ N, per rectam A N ad vectem perpendicularem jungatur, in punctis C & B, pondera C & B, æqualia conſtituantur, & ſimilia quæ ad centrum per rectas C N, B N annuant. Si rectæ N C, N B, eſſent ad vectem perpendiculares potentia in A æqualis duobus ponderibus B & C ex tuo principio detineret vectem. Sed cum angulos N C A, N B A acutos efficiant, aut eadem, aut minor, aut major potentia requiretur in A ad æquilibrium. Si eadem potentia facit æquilibrium, verum erit principium quo in precedenti ad te epiſtola uſi ſumus (quod ſi fatearis, ſtatim vectem noſtrum demonſtrabimus.) Si major, aut minor potentia æquilibrium conſtituit, ergo in 1. caſu quò minuentur magis anguli rectarum C N, B N cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in 2. caſu minor. Supra punctum A idem vectis in eadem directionis linea ſimiliter ponatur, ut in figura minuentur anguli linearum C N, B N, ut patet: variabit igitur potentia æquilibrij in A conſtituta, ideoque pondus ex gravibus B & C compoſitum pro diverſa à terræ centro diſtantia erit etiam diverſum.

Primam partem dilemmatis quo minus fatearis impedit tua propoſitio, quippe hoc dato, corrueret, fatearis igitur neceſſe eſt, aut potentiam in A variare pro diverſitate angulorum, aut eamdem ſemper eſſe in omni angulorum acutorum poſitione, ſed tamen inæqualem potentiæ quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.

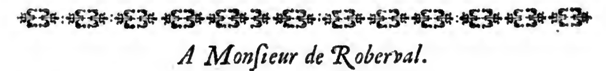
Utrumlibet conceſſeris, manifeſtiſſima demonſtratione detegitur paralogiſmus, quem tuæ demonſtrationi irrepſiſſe nec veritas quam quærimus patitur diſſimulare, nec tu ipſe poteris fortaſſe diffiteri.

In prima figura quæ eſt quarta tuæ propoſitionis, his verbis ita conſtruis. Soit le centre de la balance A, le bras A B plus grand que le bras A C, & ſoint premierement les lignes de direction B D, C E, perpendiculaires aux bras A B, A C, par leſquelles lignes tirent les puiſſances, D, E, (leſquelles ſeront des poids ſi on veut) & qu'il y ait méme raiſon de la puiſſance D à la puiſſance E, que du bras A C, au bras A B, les puiſſances tirans l'une contre l'autre, je dis qu'elles feront equilibre ſur la balance C A B. Car ſoit prolongé le bras C A juſques en F en ſorte que A F ſoit égale à A B, & ſoit conſiderée C A F comme une balance droite, de laquelle le centre ſoit A, ſoint auſſi imaginées deux puiſſances G, H, deſquelles & de toutes leurs parties les lignes de direction ſoint paralelles à la ligne C E, & que la puiſſance G ſoit égale à la puiſſance D, & la puiſſance H égale à la puiſſance E, l'une ſçavoir G tirant ſur le bras A F, & l'autre ſçavoir H tirant ſur le bras A C, lors par la premiere propoſition, les puiſſances G H feront equilibre ſur la balance C A F. Mais par le premier principe la puiſſance D ſur le bras A B, fait le méme effet que la puiſſance G ſur le bras A F, partant la puiſſance D ſur le bras A B fait equilibre

avec la puissance H sur le bras A C, & la puissance H tirant de méme que la puissance E sur le bras A C, par le méme premier principe, la puissance D sur le bras A B, fera equilibre avec la puissance E sur le bras A C. Hîc vertitur cardo tuæ demonstrationis.

Et 1. si dixeris in omni angulorum acutorum positione eamdem semper potentiam requiri ad æquilibrium, statim demonstrabo meam de vecte propositionem: fatearis igitur necesse est variare potentiam prout anguli variant. His positis, esto si placet in exposita figura centrum terræ N in quod rectæ C E, B D dirigantur, & sint in punctis E & D pondera seu gravia in proportione data, quod quidem liberum esse tua innuit constructio (imò hùc tantùm abs te tenditur ut per potentias imaginarias ab omnibus omnino partibus ὁμαλῶς moventes inveniatur proportio ponderum in vecte quiescente, aliter quippe, cum hujusmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur, inutiles prorsus essent) in punctis H & G construis potentias ponderibus E & D, æquales, quæ ab omnibus ipsarum partibus ὁμαλῶς moveant, potentiam deinde H, potentiæ E æqualiter movere concludis per 1. tuorum axiomatum, quia nempe trahet H potentia per punctum C, & rectam H A, perpendicularem vecti, trahet etiam pondus E, per eamdem rectam vecti perpendicularem, cum igitur æquales potentiæ per eamdem rectam & eumdem angulum moveant, & circa eamdem à vectis centro distantiam, pondus E & imaginaria H, potentia æqualiter trahunt. Id verisimile cum sit, veritatem intimam quærentibus non potest non videri falsissimum. Pondus in E sit Sphæricum, verbi gratia, omnes omnino ipsius partes ad centrum N tendunt per rectas in eadem N, centro concurrentes & vectem I C, si continuentur ad angulos acutos stantes, ergo potentiæ abs C, utrinque æqualiter remotæ intelligentur, vectem ad angulos acutos suis motibus secantes; contra cum partes omnes potentiæ H ὁμαλῶς moveant, intelligentur potentiæ abs C utrinque æqualiter remotæ ad angulos rectos vectem suis motibus secantes. Cum igitur partes omnes potentiæ H simul sumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ seu ponderis E simul sumptis, tota enim potentia H toti ponderi E æquatur, patet ex jam traditis potentiarum H, E, in punctis H & E inæqualem esse motum; quod igitur de potentia H concludit demonstratio, perperam ad pondus E porrigit.

S'il me restoit du temps ou du papier j'adjoûterois suivant vôtre desir la demonstration des cones Isoperimetres, ce sera une autre fois, me reservant encore de vous écrire quelque chose de plus recherché sur les Mechaniques, à la charge que vous m'obligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer aprés une proposition, si je ne la croyois veritable, & que je la quitteray un moment aprés que de nouvelles raisons l'emporteront sur les miennes. Je suis, &c.



A Monsieur de Roberval.

MONSIEUR,

Je trouve assés de loisir pour vous envoyer encore la construction du lieu plan, si à quotcumque, &c. que je tiens une des plus belles propositions de la Geometrie, & je crois que vous serés de mon advis.

Sint data quotlibet puncta, 5. verbi gratia, A, G, F, H, E, (nam propositio est generalis) quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quolibet puncto inflectendo rectas à datis punctis, quadrata omnium sint æqualia spatio dato. Jungantur puncta quævis A & E, per rectam A E, in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares G, B, H, D, F, C, omnium rectarum, punctis datis vel occursu perpendicularium & puncto

A terminatarum ſumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratia, in hac ſpecie: quintans ergo rectarum A B, A C, A D, A E, ſimul ſumptarum eſto A O, & à puncto O excitetur perpendicularis infinita O N, à quâ reſecetur O I pars conditionaria (quintans nempe pro numero punctorum datorum) perpendicularium G B, F C, H D, & intelligantur jungi rectæ A I, G I, F I, H I, E I, quadrata iſtarum 5. erunt minora ſpatio dato; demantur igitur à ſpatio dato & ſuperſit, verbi gratia, Z planum cujus quintans, pars nempe conditionaria ſumatur, & in quadratum redigatur, circulus centro I, intervallo M deſcriptus ſatisfaciet propoſito, hoc eſt quodcumque punctum ſumpſeris in ipſius circumferentia rectarum à datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia ſpatio dato.

Adderem demonſtrationem, ſed longa ſanè eſt, & malim veſtrum amborum ſollicitare genium ad eam inveniendam: non ſolùm autem has propoſitiones, ſed omnes omnino de locis planis abſolvi, imò locos quamplurimos adinveni de quibus nihil ſcripſerat Apollonius, qui tamen ſunt pulcherrimi, verbi gratiâ.

Datis tribus punctis in rectâ A B C, invenire circuli circumferentiam in quâ ſumendo quodlibet punctum ut N, quadrata A N, N B, ſuperent quadratum N C ſpatio dato.

De locis ſolidis & ad ſuperficiem multa quoque jam ſunt detecta. Caſus loci plani ſuperioris non addo, nam patebunt ſtatim. Si puncta data ſint tantùm tria, & conſtituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli, & hæc proportio ſingularis, ſatis eſt mira.

Sed hîc non moror. Propoſitionem univerſaliſſimam ita conſtituo, & jam conſtruxi. Si à datis quotlibet punctis inflectantur rectæ, & exponantur omnium ſpecies in datâ proportione creſcentes, aut deficientes erunt ſpecies ita auctæ aut deminutæ dato ſpatio æquales. Exemplum. Sint data tria puncta in ſuperiori figurâ A, N, C, & quærendus circulus in cujus circumferentiâ ſumendo quodlibet punctum ut N quadrati N A dimidium, verbi gratiâ, quadrati B N duplum & quadrati C N triplum ſimul juncta conficiunt ſpatium datum & demonſtratio ad quamlibet proportionem & quotlibet puncta porrigenda. Hanc propoſitionem, pulcherrimam ſanè, videtur non vidiſſe Apollonius.

Lettre de Monſieur de Roberval à Monſieur de Fermat.

Du 4. Avril 1637.

MONSIEUR,

Quoy que j'euſſe receu des Lundy dernier vôtre demonſtration du lieu plan, neantmoins mes occupations tant publiques que particulieres ne me permirent point de la conſiderer juſques à Jeudy que je la preſentay de vôtre part à l'Aſſemblée de nos Mathematiciens qui étoit ce jour là chez Monſieur de Montholon Conſeiller, où elle feut receüe, conſiderée, admirée avec étonnement des eſprits, & vôtre nom élevé juſques au Ciel, avec charge particuliere à moy de vous remercier au nom de la Compagnie, & vous prier de m'envoyer tout d'une main la compoſition du lieu ſolide avec une briefve demonſtration, afin de faire imprimer les deux ou ſoûs vôtre nom, ou ſans nom comme vous le voudrez: en quoy nous aurons le ſoin d'étendre plus au long ce qui ſemblera trop concis pour le public; cependant il y eût debat à qui auroit vôtre écrit pour en tirer copie, chacun m'enviant le bon-heur de la communication que j'ay avec vous: mais Monſieur le Preſident Paſchal à qui le premier je l'avois mis entre les

mains, & qui l'avoit leu à la Compagnie, donna arrest en sa faveur, se fondant sur la maxime (qui tenet, teneat) & pour faire droit aux parties interessées, se chargea luy méme de leur en fournir copie, ordonnant que puis aprés l'original me seroit remis entre les mains. Je leur avois dés auparavant communiqué la construction, & un nommé Monsieur le Pailleur avoit trouvé la demonstration particuliere pour trois & pour quatre points, si differente de la vôtre, que c'est une chose étrange; il y avoit apparence qu'avec le temps il eût trouvé une demonstration generale. Mais il confesse que cette recherche le tüoit, & qu'il vous a une particuliere obligation, de l'avoir delivré d'une peine presque insupportable; pour moy je ne me puis promettre aucun loisir que trois mois ne soient passez, pour étre delivré de mes leçons publiques, & quand j'aurois ce loisir je ne serois pas assûré de trouver le lieu solide, lequel je prevoy tres-difficile, c'est pourquoy dés maintenant je vous feray si vous voulés une ample declaration de mon impuissance, afin que sans me tenter plus long-temps, & qu'ayant égard aux prieres d'une telle Compagnie que celle dont je vous parle, vous nous fassiez part de vôtre invention, qui est telle que le grand Geometre des siecles passez se glorifioit particulierement d'y avoir adjoûté la perfection, en ayant receu l'invention de ceux qui l'avoint precedé; jugés combien vous avés occasion de vous glorifier de l'avoir trouvée en un temps auquel elle étoit en méme état que si elle n'avoit jamais été connue. Il m'est enfin parû quelque lumiere pour le centre de gravité des paraboles en considerant les centres des parallelogrammes circonscrits, comme s'ils étoint tous posés sur une méme baze differens seulement en hauteur, mais comme ces lumieres me viennent au matin en me levant, & qu'il faut du loisir pour les éclaircir je ne me puis pas promettre d'en venir à bout si tôt; si vous me délivrés de cette peine, je vous en auray l'obligation entiere. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur de Roberval à Paris.

Du 20. Avril 1637.

MONSIEUR,

Je ne peus pas vous écrire par le dernier Courrier, à cause des occupations ausquelles je me trouvay engagé, je prens maintenant la plume pour vous témoigner que je suis beaucoup obligé à ces Messieurs, à qui vous avés fait voir ma proposition, ausquels vous asseurerés, s'il vous plaît, que j'estime beaucoup plus leur approbation que mon Ouvrage. Leur sçavoir est si connu, que je ne puis m'empécher d'étre glorieux d'avoir écrit & inventé quelque chose qui leur plaise. Je ne pretends pas par là vous exclurre du nombre, au contraire les marques de vôtre sçavoir m'étant plus particulierement connuës, je juge par là quels doivent étre ceux qui conferent avec vous.

Au reste je vous eusse envoyé les lieux solides, ad 3. & 4. lineas, n'étoit que j'ay creu que Monsieur de Beaugrand ne fera pas difficulté de bailler à Monsieur de Carcavi le lieu ad 3. lineas, que je luy envoyay il y a long-temps avec la demonstration, dés que vous aurez celuy-là je vous envoyeray l'autre. Si j'avois retenu copie de celuy ad 3. lineas je n'eusse pas fait difficulté de vous l'envoyer. Mais ne l'ayant plus, j'ay voulu ménager la peine qu'il m'eût falu prendre à le refaire, à laquelle je me porteray pourtant, si Monsieur de Beaugrand ne le baille pas. Vous verrez entre les mains de Monsieur Carcavi les deux livres, de locis planis, que j'avois promis depuis long-temps à Monsieur Beaugrand, & que j'ay à dessein envoyé un Courrier plûtôt que je ne luy avois fait esperer, afin que vous puissiez cependant les voir. Vous m'obligerez de m'en écrire avec

franchise vôtre sentiment. Je ne doûte pas que la chose n'eût peu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes; je seray bien aise que vous m'écriviez aussi quelles de ces propositions vous étoient connües, & quelles non, & en cas que vous en ayez veu quelqu'une, principalement du 2. Livre, si elles étoient pareilles à celles que vous verrez. Car il y a huit ans que le deuxiéme Livre est écrit & en ce temps j'en baillay deux copies, l'une à Monsieur Despagnet Conseiller au Parlement de Bourdeaux, & l'autre à Monsieur de ...., si bien que peut-étre quelqu'une de ces propositions aura esté divulguée, peut-étre vous méme, ou quelqu'autre de ceux de vôtre Compagnie en ont fait une partie. Eclaircissez moy de tout au vray, & vous m'obligerez beaucoup, & sur tout que vôtre jugement suive toutes ces propositions, s'il vous plaît, je l'attends pour réponse à celle-cy; au reste quoy qu'on juge digne d'impression de moy, je ne veux pas que mon nom y paroisse, je me reserve à vous entretenir plus amplement une autrefois; cependant vous sçaurez qu'outre les lieux plans & solides qui sont dans Pappus, j'en ay trouvé grande quantité de tres-beaux & dignes de remarque, que je n'ay pourtant ozé méler avec ceux d'Apollonius. J'en ay plus de cent propositions tres-belles, & particulierement des lieux solides, & ad superficiem, mais le loisir me manque; je n'ay pas voulu faire le Grammairien en expliquant au menu le texte de Pappus, il suffit que j'aye pris son sens, comme je croy que vous m'advoüerez. J'attends vôtre réponse, & suis, &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 1. Iuin 1638.

MONSIEUR,

Puis qu'il est vray qu'il n'y a aucun contentement que je prefere à celuy que je reçoy de vos Lettres, vous devés penser que les occupations qui m'ont empéché de vous écrire depuis si long-temps, doivent avoir esté bien pressantes, ayans eu la force d'interrompre nôtre entretien qui m'est si cher & si agreable. Or pour recommencer, je vous diray que si j'ay entrepris la defense de vôtre traitté (de Minimis & Maximis) contre les objections de M. Descartes, je m'y suis senty obligé, ou plûtôt necessité par mon genie, qui ne peut souffrir que la verité soit tant soit peu obscurcie, tant s'en faut qu'il endure qu'on la fasse passer pour ce qu'elle a de plus contraire, j'entens pour une fausseté accompagnée de paralogismes. C'est pourquoy j'ay grand besoin qu'au lieu de me remercier comme vous faites, vous m'excusiez, tant pour ce qu'étant foible j'ay osé entrer en lice contre un fort adversaire pour vous, que pource que je l'ay fait sans vous en advertir, veu que vous sembliez y avoir le principal interest. Mais en effet c'est l'interest de la verité, & de tous ceux qui la cherissent; c'est pourquoy j'en ay fait le mien propre, & elle ma paru si claire qu'elle m'a fait passer pardessus les considerations de ma foiblesse, à laquelle j'ay pensé que son évidence pourroit suppleér assez suffisamment. J'espere que vous recevrez cette excuse & que vous me ferés l'honneur de croire que la connoissance que j'ay de vôtre merite, m'a tellement acquis à vous, qu'elle m'a fait témoigner ce zele, quoy que mon insuffisance seule l'ait peu rendre en quelque sorte indiscret. Monsieur Descartes n'ayant pas encor receu mon écrit le 3. May, ce qui est pourtant bien tard, a fait quelques objections nouvelles de peu de consequence, vous les verrez dans sa Lettre que le Pere Mersenne vous pourra envoyer, il veut trouver la tangente d'un cercle, persistant toûjours que c'est la plus grande, sinon qu'il y adjoûte qu'elle n'est la plus grande que soûs certaines conditions; en quoy il s'enferre luy mé-

me, voulant refuter vôtre écrit qui parle de la plus grande absolument, par l'exemple d'une qui n'est la plus grande que conditionnairement. Il est vray que voulant la trouver absolument ou la moindre, & pour ce faire nommant le diametre N D, C, D E, B, & D C, ou E C, A, on tombe dans une absurdité que $C + B^2$ est égal à rien, & si le point E étoit dans le cercle $C - B^2$ seroit égal à rien. Mais cette absurdité monstre qu'il ne faut pas chercher le point B dans la circonference autre part que dans la ligne D N, sçavoir au point N pour la plus grande, & au point D pour la moindre. En quoy il est remarquable que $C + B^2$ est la somme de la plus grande & de la moindre & $C - B^2$ est leur difference. Mandez moy quel est vôtre sentiment, car n'ayant pas encor le loisir de considerer bien particulierement le fonds de vôtre methode & sa demonstration, il ne peut être qu'elle ne contienne des mysteres qui me sont encore cachez. J'ay trouvé admirable le moyen par lequel vous l'appliquez aux paraboles & solides paraboliques pour en trouver les centres, mais le voulant éprouver en la vraye parabole, j'ay trouvé qu'il falloit changer vôtre raisonnement qui n'est que particulier au Conoïde parabolique, car ayant l'espece de la ligne E O, vous pouvez bien dire comme la difference des quarrez I A, & AN est au quarré de AN, ainsi la ligne EO est à OM, ce que vous ne prouvez pas en la parabole méme, en laquelle suivant ce raisonnement il faudroit dire, comme la difference des cubes de I A & A N est au cube de A N, ainsi la difference des quarrez de E M, & M O est au quarré de MO, & cependant vous n'avez pas l'espece ny de l'un ny de l'autre de ces quarrez; au lieu desquels j'ay dit ainsi, il y a plus grande raison du cube I A au cube A N que du quarré E I au quarré O I, ce qui reüssit, & en la parabole cubique j'ay dit, il y a plus grande raison du quarré-quarré I A au qq. A N, que du cube E I au cube O I, &c. Mais le raisonnement est autant ou plus beau & plus facile par les figures qui restent ayant osté le plan parabolique du parallelogramme qui le comprend. J'ay promis à Mr. Mydorge de l'entretenir sur cette invention que je ne sçaurois assez admirer; & je m'asseure que Mr. Paschal en fera ses exclamations ordinaires, si je puis la luy faire voir, comme j'espere & a Mr. des-Argues; il faut aussi que Mr. Descartes la voye, afin qu'il nous en fasse voir les paralogismes, & puis que vous avez trouvé par sa méme voye les tangentes de sa figure qui est une espece d'ovale, il sera bon que vous luy envoyez, ou nous, si vous le trouvez meilleur. Mais prenez garde que par le méme point donné il peut y passer deux de ces ovales, & partant y avoir deux tangentes, ce que j'espere que l'equation fera découvrir. J'y travaillerois, mais je suis assuré que vous y reüssirez mieux que moy: joint qu'il me faudroit étre délivré de la roüe à laquelle je suis attaché, ayant appellé du nom de roüe le cercle qui roule, avec les conditions que vous sçavez, & ayant donné un nom à la ligne courbe que décrit un point de la circonference pendant une revolution entiere, je demonstre que l'espace compris de cette ligne courbe, & de la droite qui luy sert de base sur laquelle la roüe se meut, est (majus datâ quàm in ratione) c'est à sçavoir que de cét espace en ayant osté l'espace de la roüe, il y aura méme raison du reste à la méme roüe, que de la base de l'espace à la moitié de la circonference de la roüe. D'où il s'ensuit qu'en la roüe ordinaire de laquelle la base est estimée égale à la circonference, l'espace dont il s'agit est triple de la roüe, & si la base est double de la circonference l'espace sera quintuple de la roüe: Si triple, septuple: & ainsi en continüant par les nombres impairs. De tout cecy, je vous envoyeray par le premier Courrier une brieve demonstration, en attendant le traitté entier. Je suis, &c.

*Lettre de Monſieur de Fermat à Monſieur de *****

MONSIEUR

Puis que Monſieur de . . . . . parle, & que vous l'ordonnés, vous, Monſieur, de qui la reputation eſt ſi grande & ſi bien établie, je laiſſe éveiller ma Geometrie, qui dormoit dépuis long-temps dans un profond repos, & pour entrer d'abord en matiere, je veux bien vous conter l'intrigue de nôtre Dioptrique * & de nos refractions en forme d'Hiſtoire, afin de vous laiſſer le jugement libre, & que vous puiſſiez prononcer ſans preoccupation. Dés que j'eus veu le Livre de feu Monſieur Deſcartes, & que j'eus examiné avec quelque attention la propoſition qui ſert de fondement à ſa Dioptrique, & qui établit la proportion des refractions, je ſoupçonnay ſa preuve, ſa demonſtration me ſembla un veritable paralogiſme. 1. Parce qu'il la fonde ſur une comparaiſon, & que vous ſçavez que la Geometrie ne ſe picque guere de ces figures, les comparaiſons y étant encore plus odieuſes que dans le commerce du monde. Secondement parce qu'il ſuppoſe que le mouvement de la lumiere qui ſe fait dans l'air & dans les corps rares eſt plus malaiſé, ou ſi vous l'aimez mieux ainſi plus lent que celuy qui ſe fait dans l'eau, & les autres corps denſes, ce qui ſemble choquer le ſens commun, & enfin parce qu'il pretend que l'une des directions ou des determinations du mouvement d'une balle ſubſiſte toute entiere aprés la rencontre du ſecond milieu, j'adjoûtois méme quelques autres raiſons, qu'il ſeroit ou ſuperflu, ou ennuyeux de vous déduire; il vit mes écrits, il y répondit, & aprés pluſieurs réponſes & repliques de part & d'autre nous nous ſeparames, comme le prevenu & le témoin, l'un dans l'affirmative, l'autre dans la negative, quoy que j'eus enfin des Lettres de ſa part pleines de civilité. Dépuis ſa mort Mr. de la Chambre ayant publié ſon traité de la lumiere, & m'ayant fait l'honneur de me l'envoyer, je pris occaſion de luy écrire la Lettre que vous avés veüe, dans laquelle je luy témoignay que pour nous guarentir des paralogiſmes en une matiere ſi obſcure, je ne voyois point de moyen plus aſſûré que de chercher les refractions dans cet unique principe que la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, ſur le fondement duquel je luy indiquay qu'on pouvoit chercher par Geometrie le point de refraction en le reduiſant au probleme ou theoreme que vous ſçavez; mais parce que j'en jugeay l'invention tres-difficile & tres-embarraſſée, puis que ces queſtions de maximis & minimis, conduiſent d'ordinaire à des operations de longue haleine, & qui ſe brouillent aiſement par une infinité d'aſymmetries qu'on trouve ſur ſon chemin, je laiſſay là ma penſée pendant pluſieurs années en attendant que quelque Geometre moins pareſſeux que moy en fit ou la découverte ou la demonſtration. Perſonne ne voulut entreprendre ce travail; cependant je recevois de Lettres de Monſieur de la Chambre de temps en temps, par leſquelles il me preſſoit d'adjoûter la Geometrie à mon principe, & de faire la demonſtration en forme du veritable fondement des refractions. Ce qui me rebutoit à l'advance étoit l'aſſeurance que Mr. Petit & autres m'avoient donnée, que leurs experiences qu'ils avoient ſouvent reiterées pour meſurer les refractions, & dans l'eau, & dans le criſtal, & dans le verre, & dans beaucoup d'autres liqueurs differentes, s'accordoint tres-preciſément avec la proportion de Monſieur Deſcartes, de ſorte qu'il me ſembloit inutile d'en aller

* Ceux qui ont le troiſiéme Tome des Lettres de M. Deſcartes y pourront voir plus au long les objections de M. de Fermat contre la Dioptrique de M. Deſcartes, & divers écrits ſur ce ſujet depuis la page 167. juſques à la page 350

chercher quelqu autre par mon principe, puisque la nature elle méme s'expliquoit si clairement en sa faveur. L'objection que vous me faites dans vôtre écrit ne me faisoit nulle peine, & j'y avois déja répondu dans ma Lettre à Mr. de la Chambre par cette raison que tout ce qui appuye ou fait ferme sur quelque point d'une ligne courbe est censé faire ferme ou appuyer sur la ligne droite qui touche la courbe audit point, & ainsi quoy que la somme des deux lignes de reflection soit quelquefois la plus grande dans les miroirs concaves, sphæriques ou autres, elle est toûjours la plus petite de toutes celles qui peuvent tomber sur la ligne ou sur le plan qui touchent les miroirs au point de la reflection, & cela n'a pas besoin de plus grande preuve, Mr. Descartes le supposant ainsi aussi bien que moy; toute la difficulté se reduisoit donc à ce qu'il me paroissoit que j avois à combattre, non seulement les hommes, mais encore la nature. Neantmoins les dernieres instances de M. de la Chambre furent si pressantes que je resolus il y peut avoir environ deux ou trois ans de tenter le secours de mon analyse, m'imaginant qu'il y a une infinité de proportions differentes entre-elles, dont les sens ne sçauroient verifier la diversité, & qu'ainsi j en trouverois peut-étre quelqu'une qui approcheroit de celle de Monsieur Descartes, & qui pourtant ne seroit pas la méme. Je fis mon analyse en forme par une methode qui m'est particuliere, & qu'Herigone à fait autrefois imprimer dans son cours Mathematique, je surmontay toutes les asymmetries avec peine, & voila que tout à coup à la fin de mon operation tout se débroüille, & il me vient une equation tres-simple qui me donne justement la méme proportion de Monsieur Descartes; je creus sur l'heure avoir equivoqué, car je ne pouvois me figurer qu on aboutit à une méme conclusion par des routes tout à fait opposées, Mr. Descartes supposant pour un des moyens de sa demonstration que le mouvement de la lumiere trouve plus de resistence dans l'air que dans l'eau, & moy supposant tout le contraire, comme vous verrez dans la copie de ma demonstration que j'ay tâché de refaire de memoire pour vous satisfaire pleinement, mon original ayant esté envoyé à Monsieur de la Chambre suivant ma paresse ordinaire. Je refis donc pour lors la question à diverses reprises en changeant les positions, & je trouvay toûjours la méme conclusion, ce qui me confirma deux choses, l'une que l'opinion de Mr. Descartes sur la proportion des refractions est tres-veritable, & l'autre que sa demonstration est tres-fautive, & pleine de paralogismes. Messieurs les Cartesiens virent ensuite ma demonstration qui leur fut communiquée par Monsieur de la Chambre, ils s opiniâtrerent d'abord à la rejetter, & quoy que je leur representasse tout doucement qu'il leur devoit suffire que le champ de bataille demeurât à Mr. Descartes, puisque son opinion se trouvoit veritable & confirmée, quoy que par de raisons differentes des siennes, que les plus fameux Conquerans ne s'estimoient guere moins heureux lors que la victoire leur étoit procurée par les troupes auxiliaires, que si c'étoit par les leurs, ils ne voulurent point dans les premiers mouvemens entendre raillerie, ils vouloint que ma demonstration fût fautive, puis qu'elle ne pouvoit pas subsister sans destruire celle de Mr. Descartes qu'ils entendoient mettre toûjours hors du pair; mais comme les plus habiles Geometres qui virent la mienne sembloint y donner leur approbation, ils me firent enfin compliment par une Lettre de Mr. Clairsellier, qui est celuy qui a procuré l'impression des Lettres de Monsieur Descartes, ils crierent au miracle dequoy une méme verité s'étoit rencontrée au bout de deux chemins entierement opposez, & prononcerent qu'ils vouloient bien laisser la chose indecise, & advoüer qu'ils ne sçavoint à qui donner la preferance de Mr. Descartes ou de moy sur ce sujet, & que la posterité en jugeroit. C'est à vous, Monsieur, qui estés sans doute destiné par vôtre merite extraordinaire à avoir grand commerce avec elle à l'informer, si vous le jugez à propos, de ce celebre demélé, ou si vous aymés mieux placer ce petit écrit parmi vos papiers inutiles, j'y consens, & tout m'est indifferent; mais il n'en est pas de méme de la tres-humble priere que je vous fais de me croire, &c.

Demonstration dont il est parlé dans la Lettre precedente.

SOit la droite A F M, qui represente la separation de deux differens milieus, que l'air soit du costé de B, & l'eau du costé de H, le rayon de lumiere qui doit aller du point B qui est en l'air, vers le point F, ou commence le milieu de l'eau, se romp & va vers H, s'approchant de la perpendiculaire suivant les experiences connuës & vulgaires. Monsieur Descartes determine ce point H, en telle sorte qu'en tirant une perpendiculaire du point B sur la ligne A F M, qui soit B A, il fait que la ligne A F est à la ligne F M, comme la resistance d'un des milieus à celle de l'autre, bien qu'il entende contre mon sens, que la resistence est plus grande dans l'air qu'elle ne l'est dans l'eau. Soit donc la plus grande resistance representée par la ligne A F & la moindre par celle de F M & par consequent la ligne A F plus grande que F M, soit élevée du point M la perpendiculaire M H qui soit coupée en H par le cercle dont le centre est F, & le rayon F B, si bien que les droites B F, & F H seront égales, je dis que le rayon B I venant à se rompre par la rencontre de l'eau ira vers H, car puisque par mon principe la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, si je prouve qu'en passant par les deux droites B F, & F H elle y employe moins de temps qu'en passant par aucun autre point de la droite A M, j'auray prouvé la verité de la proposition; or puis que je presuppose que le mouvement dans l'air est plus aisé, & par consequent plus vîte, le mouvement de B en F se faira en moins de temps que celuy de F à H, & pour regler la veritable proportion, il faut faire comme A F à F M, qui sont les mesures des resistances, ainsi B F à F D, & les deux droites D F & F H seront les mesures du temps qui sera employé de B à F & de F a H, sçavoir la droite D F, sera la mesure du mouvement par B F qui est plus vîte, & la droite F H sera la mesure du mouvement par F H qui est plus lent, & ce suivant la proportion de B F à F D, ou de H F qui est égale à B F à la méme F D; si je prouve donc que quelque point que vous preniez des deux costez D F, la somme des deux droites D F, F H est toûjours plus petite que deux droites prises au méme sens, j'auray ce que je cherchois; soit donc premierement du costé vers M le point O en joignant les droites B O, & O H, & faisant comme B F à D F ainsi B O à C O, je dois prouver que la somme des deux droites C O & O H est plus grande que celle de D F & F H, & en prenant de méme quelqu'autre point comme V de l'autre côté vers A, je dois aussi prouver qu'en joignant les deux droites B V, & V H, & faisant comme B F à D F, ainsi B V à Y V la somme des deux droites Y V, & V H est plus grande que celle des deux droites D F & F H; pour y parvenir je fais comme B F à A F, ainsi F O à F R, & comme la méme B F à F M ainsi F O à F I, puisque B F est plus grande que A F, donc F O est plus grande que F R, & puisque A F est plus grande que F M, F R est aussi plus grande que F I, & il paroît méme que F R est à F I comme A F à F M, car puisque par la construction comme A F est à F B ainsi F R à F O, & comme F B à F M ainsi F O à F I, donc, ex æquo, comme A F à F M, ainsi F R est à F I, je dis donc que les deux droites C O & O H sont plus grandes que les deux droites D F & F H, car par Euclide au triangle amblygone F H O la somme des deux quarrez H F & F O est égale à la somme du quarré H O & du rectangle M F O pris deux fois, or puisque nous avons fait comme B F ou F H à F M ainsi F O à F I, donc le rectangle soûs les extremes H F I est égal au rectangle soûs les moyennes M F O, & le rectangle H F I pris deux fois est égal au rectangle M F O pris deux fois; nous avons donc la somme des deux quarrez H F & F O égale à la somme du quarré H O & du rectangle H F I pris deux fois, mais le rectangle H F I pris deux fois est égal au rectangle H I F pris deux fois, & au double quarré de I F & le quarré H F par le méme Euclide est égal au rectangle H I F pris deux fois, &

aux deux quarrez H I & I F, nous avons donc d'un côté le quarré H I, le quarré I F, le rectangle H I F deux fois pris, & le quarré F O égaux au quarré H O au rectangle H I F deux fois pris & au quarré F I pris deux fois, ôtez de part & d'autre le rectangle H I F deux fois & le quarré F I, reste d'un côté le quarré H I avec le quarré F O égaux audit quarré H O & I F, mais le quarré F O est plus grand que le quarré F I, puis que par la construction F O est plus grande que F I, donc le quarré H O est plus grand que le quarré H.I, & partant la droite H O est plus grande que la droite H I; si je prouve en suite que la droite C O est plus grande que les deux droites D F & F I, il restera prouvé que les deux C O & O H sont plus grandes que les trois D F, F I, & I H, ou que les deux DF & FH; je prouve donc le requis dans le triangle amblygone BFO par Euclide le quarré B O est égal à la somme des quarrez B F & F O & au double rectangle A F O, mais puisque nous avons fait par la construction comme B F à F A ainsi F O à F R, donc le rectangle sous B F & F R est égal au rectangle A F O, & par consequent le quarré B O est égal aux quarrez B F & F O & au rectangle sous B F, F R deux fois pris, mais le quarré FO est plus grand que celuy de FR, puisque la ligne FO a esté prouvée plus grande que la ligne F R, donc si vous substituez le quarré de F R au lieu de celuy de F O, le quarré B O sera plus grand que les deux quarrez B F, F R, & le rectangle B F R deux fois pris, mais ces dernieres sommes sont égales par Euclide au quarré des deux droites B F & F R prises comme une seule, donc la droite B O est plus grande que la somme des deux droites B F & F R: mais nous avons prouvé que R F est à I F comme A F à F M, c'est à dire comme B F à F D qui est la mesure de la diversité des mouvemens, donc comme la somme des deux antecedens B F & F R est à la somme des deux consequens D F & F I, ainsi B F à F D, or B O est à O C, comme B F à F D, donc comme B O est à O C, ainsi la somme des deux droites B F & F R est à la somme des deux droites D F & F I, mais nous avons prouvé que la droite B O est plus grande que la somme des deux droites B F & F R, il est donc vray que la droite C O est plus grande que la somme des deux droites D F & F I, ce qu'il faloit prouver en second lieu; il n'y a donc aucun point du côté de M par où le rayon puisse passer sans y employer plus de temps que par le point F. Il reste à prouver la méme chose au point V; soit fait comme cy dessus, comme B F à F A, ainsi F V à F N, & comme la méme B F à F M, ainsi F N à F X, N F sera à X F comme A F à F M, c'est à dire comme B F à F D par la preuve precedente, & chacune de ces deux droites N F & X F sera plus petite que V F, par ce qui a precedé; il faut prouver que la somme des deux droites Y V & V H est plus grande que la somme des deux droites D F & F H. Je considere premierement que par Euclide dans le triangle amblygone V F H la somme des quarrez H F & F V, & du rectangle M F V pris deux fois est égale au quarré V H, mais puis que par la construction il a esté fait comme B F à F M ainsi F V à F X, donc le rectangle B F X ou le rectangle H F X (puisque B F & F H sont égales) est égal au rectangle M F V: nous avons donc d'un costé la somme des quarrez H F & FV & du rectangle H F X pris deux fois égale au quarré H V, mais le quarré F X est moindre que le quarré F V, donc la somme des quarrez H F, F X & du rectangle H F X pris deux fois est moindre que le quarré H V. Or cette somme est égale au quarre fait des deux droites H F & F X, comme d'une seule par Euclide, donc la somme des deux droites HF & F X est moindre que H V & H V est plus grande que ces deux droites H F & F X; si je prouve donc que la droite Y V est plus grande que la droite D X il restera prouvé que la somme des deux Y V & H V est plus grande que la somme des trois D X, X F, F H, c'est à dire que des deux D F, F H, pour faire cette derniere preuve, je considere le triangle amblygone BVF auquel par Euclide les deux quarrez B F & F V sont égaux au quarré B V, & au rectangle A F V pris deux fois; or puisque par la construction nous avons fait comme B F à F A, ainsi V F à F N, donc le rectangle B F N est égal au rectangle A F V, & partant la somme des deux quarrez B F & F V est égale à la somme du quarré B V, & du rectangle B F N pris deux fois; or le rectangle B F N pris deux fois est égal

au rectangle B N F pris deux fois, & à deux fois le quarré F N, donc la somme des deux quarrez BF & F V est égale à la somme du quarré B V, du rectangle B N X pris deux fois, & du quarré de F N pris deux fois; or le quarré B F est par Euclide égal au quarré BN, au quarré N F, & au rectangle B N F pris deux fois, nous avons donc la somme des quarrez B N, N F, F V, & du rectangle B N F pris deux fois égale à la somme du quarré BV du rectangle B NF pris deux fois, & du quarré de FN pris deux fois: ôtez de châque côté le rectangle BNF pris deux fois, & le quarré N F, il restera donc que le quarré de BN, & le quarré FN seront égaux aux quarrez BV & FN, or le quarré FV est plus grand que le quarré de F V par la construction, donc le quarré B V est plus grand que celuy de B N, & partant la droite B V est plus grande que la droite B N, mais nous avons prouvé que comme la droite B F est à F D, ainsi N F est à F X, donc comme la droite B F est à F N, ainsi sera D F à F X, & par la conversion des raisons, comme B F à B N, ainsi sera D F à DX, & comme B F à D F, ainsi B N à D X, mais nous avons fait comme BF à D F, ainsi B V à Y V, donc comme B V à YV, ainsi sera B N à D X, mais nous avons prouvé que B V est plus grande que B N, donc YV le sera plus que D X. Or il a esté déja prouvé que V H est plus grande que les deux droites H F & FX, donc il est pleinement prouvé que les deux droites Y V & V H sont plus grandes que les trois D X, X F, & F H, ou que les deux D F & F H, & ainsi la demonstration est complette. Il suit de là qu'en posant mon principe, que la nature agit toûjours par les voyes les plus courtes, la supposition de Monsieur Descartes est fausse lors qu'il dit que le mouvement de la lumiere se fait plus aisément dans l'eau, & les autres corps denses que dans l'air, & les autres corps rares, car si cette supposition de M. Descartes étoit vraye, & que vous imaginiez qu'en ma figure l'air est du côté de H, & l'eau du côté de B, il s'ensuivroit en transposant la demonstration que le rayon qui partiroit du point H, & rencontreroit l'eau au point F, se romproit vers B, parce que le mouvement par l'air étant plus lent selon la supposition de Monsieur Descartes, il seroit mesuré par la droite H F, & celuy qui se fait dans l'eau seroit mesuré par la droite F D, comme étant plus vîte, de sorte que les deux droites H F, F D, étant les plus petites, la refraction se feroit vers B, c'est à dire que le rayon s'écarteroit de la perpendiculaire, ce qui est absurde & contre l'experience; si la situation des deux points B & H change dans les deux lignes BF & FH prolongées de part & d'autre autant que vous voudrez, la demonstration aura lieu, & vous le verrez de vous méme. Je n'adjoûte point l'analyse, car outre qu'elle est longue & embarrassée, il vous doit suffire que le retour que vous venez de lire est court & purement Geometrique; il suit de tout cela, que lors que les deux points B & F sont donnez, ou bien H & F, on peut trouver aisément le probleme par les plans, mais lors qu'on donne deux points C, O, B, & H, & qu'on veut chercher par eux le point de refraction dans la ligne ou plan qui separe les deux milieus, en ce cas le probleme est solide, & ne se peut construire qu'en y employant des paraboles, des hyperboles, ou des ellipses, mais comme cette invention n'est guere mal-aisée à un Geometre mediocre en demeurant d'accord du fondement, & de la proportion sur laquelle il doit travailler, & que je vous ay déja expliquée, je n'ay garde de doûter que vous ne la trouviez d'abord, vous, Monsieur, qui estés si fort au dessus du commun; outre que ne s'agissant proprement dans la question que vous me faites, que d'apprendre quelles sont les voyes de la nature, j'y ay déja satisfait, & que cette grande ouvriere n'a pas besoin de nos instrumens & de nos machines pour faire ses operations.

Lettre

Lettre de Monſieur de Fermat à Monſieur de Roberval à Paris.

MONSIEUR,

Aprés vous avoir remercié de vos civilitez,& proteſté que je ſeray ravy d'avoir des occaſions à vous plaire,je vous ſupplieray de me faire part de vôtre invention ſur le ſujet des tangentes des lignes courbes, & encore de vos ſpeculations mechaniques ſur la percuſſion, puiſque vous me faites eſperer la communication de vos penſées en cette matiere. Aprés cela je vous diray que Mr. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les myſteres des nombres, en quoy il me ſemble qu'il eſt extremement verſé;je luy ay envoyé les belles propoſitions ſur les progreſſions Geometriques,qui commencent à l'unité, leſquelles j'ay non ſeulement trouvées, mais encore demonſtrées,bien que la demonſtration en ſoit aſſez cachée, ce que je vous prie d'eſſayer, puiſque vous les avez veües; mais voicy ce que j'ay découvert depuis ſur le ſujet de la propoſition 12.du 5. Livre de Diophante, en quoy j'ay ſuppleé, ce que Bachet advoüe n'avoir pas ſceu & rétably en méme temps la corruption du texte de Diophante, ce qui ſeroit trop long à vous deduire: il ſuffit que vous voyez ma propoſition, & que je vous faſſe plûtôt ſouvenir que j'ay autrefois demonſtré qu'un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers, ny en fractions. J'en demeuray là pour lors, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne ſont ny quarrez ny compoſez de deux quarrez, comme 21, 33, 77, &c. ce qui a fait dire à Bachet ſur la diviſion propoſée de 21. en deux quarrez, quod quidem impoſſibile eſt, ut reor, cum is neque quadratus ſit, neque ſuaptè natura compoſitus ex duobus quadratis, où le mot de, reor, marque évidemment qu'il n'a point ſceu la demonſtration de cette impoſſibilité, laquelle j'ay enfin trouvée & compriſe generalement dans la propoſition ſuivante.

Si un nombre donné eſt diviſé par le plus grand quarré qui le meſure, & que le quotient ſe trouve meſuré par un nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; le nombre donné n'eſt ny quarré, ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers, ny en fractions. Exemple, ſoit donné 84. le plus grand quarré qui le meſure eſt 4. le quotient 21. lequel eſt meſuré par trois, ou bien par 7. moindres de l'unité qu'un multiple de 4. je dis que 84. n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez, ny en entiers ny en fractions.

Soit donné 77. le plus grand quarré qui le meſure eſt l'unité, le quotient 77. qui eſt icy le méme que le nombre donné ſe trouve meſuré par 11. ou par 7. moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire; je dis que 77. n'eſt ny quarré ny compoſé de deux quarrez ny en entiers ny en fractions, &c.

Je vous advoüe franchement que je n'ay rien trouvé en nombres qui m'aye tant plû que la demonſtration de cette propoſition, & je ſeray bien-aiſe que vous faſſiez effort de la trouver, quand ce ne ſeroit que pour apprendre ſi j'eſtime plus mon invention qu'elle ne vaut. J'ay demonſtré en ſuite cette propoſition qui ſert à l'invention des nombres premiers.

Si un nombre eſt compoſé de deux quarrez premiers entr'eux, je dis qu'il ne peut eſtre diviſé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme par exemple adjoûtez l'unité, ſi vous voulez, à un quarré pair, ſoit le quarré

10000000000. lequel avec un,fait 10000000001. Je dis que 10000000001, ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4. Et ainsi lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ny par trois, ny par 7. ny par 11. &c.

Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Geometrie, voicy ce qu'on ma proposé, & que j'ay trouvé tout aussi-tôt.

Per datum extra vel intra parabolam punctum rectam ducere quæ abscindat segmentum à parabolâ æquale dato spatio. Et si punctum sit intra parabolam, determinare minimum quod à parabola per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction je vous feray part de la mienne. J'attens de vos nouvelles, & suis, &c.

*A Monsieur de *****

Du 18 Octobre 1640.

MONSIEUR,

Les vacations qui m'ont éloigné de Tolose m'ont en méme temps eloigné de mon devoir, & empéché de vous écrire plûtôt depuis la derniere de vos lettres en datte du 21. Septembre. Je tâcheray de reparer par celle-cy la longueur de l'attente, & commenceray par la liberté que je prens de vous dire que je n'ay point veu encore aucune proposition de vôtre part, que je n'eusse plûtôt trouvée & considerée; & afin de vous rendre vous méme juge de cette verité, & vous ôter en méme temps le scrupule que vous pourriez avoir que je n'en uze comme quelqu'un de ceux du lieu où vous estes qui s'attribüe impunement les inventions d'autruy, apres qu'elles luy ont esté communiquées; je commenceray par la proposition de la difference de deux quarrez que vous trouverez dans Bachet sur le Diophante au Commentaire de la proposition 11. du 3. Livre en méme façon que vous me l'avez envoyée, vous advoüant pourtant que l'application que j'estime beaucoup est toute vôtre, & que je l'ay apprise de vous. Pour le sujet des progressions, je vous avois envoyé par advance les propositions qui servent à determiner les parties des puissances -1, & par ma seconde Lettre je vous avois fait comprendre que j'avois consideré toutes les propositions qui servent aux puissances plus un, dequoy je m'étois contenté de vous donner deux exemples, dont l'un étoit demonstré par moy, & par consequent connu necessairement, & l'autre ne m'étoit point entierement connu par raison demonstrative, bien que je vous assûrasse que je n'en doûtois pas: or pour venir à la connoissance de ce dernier quoy qu'imparfaite encore & non achevée, je ne le pouvois sans avoir plûtôt examiné & prouvé par demonstrations toutes leurs propositions contenües en vôtre derniere, ce que vous n'aurez nulle peine de croire, puisque le seul exemple que je vous envoyay le marquoit assez, auquel j'adjoûtois qu'en toutes progressions on pouvoit determiner les diviseurs communs & generaux avec pareille aisance: Mais je vous advoüe tout net (car par advance je vous advertis que comme ie ne suis pas capable de m'attribüer plus que je ne sçay, je dis avec méme franchise ce que je ne sçay pas) que je n'ay peu encore demonstrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée, & que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 17, 257. 6553. &c. Car bien que je reduise l'exclusion à la plus part des nombres, & que j'aye méme des raisons probables pour le reste, je n'ay peu encore demonstrer necessairement la verité de cette proposition, de laquelle pourtant je ne doûte non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve asseurée vous

m'obligerez de me la communiquer ; car apres cela rien ne m'arrestera en ces matieres.

Reste à vous parler de la proposition fondamentale des parties aliquotes, laquelle m'étoit tellement connue que je vous l'avois envoyée par la premiere Lettre que je vous écrivis, laquelle on m'a dit depuis s'être égarée. Pourtant si le Pere Mersenne veut prendre le soin de la faire chercher dans le Bureau de la Poste elle se trouvera dans un paquet que j'adressois à Monsieur..... Outre que cette proposition est si naturelle qu'il est impossible de determiner & de trouver la moindre chose sur ce sujet qu'elle ne se presente d'abord. De sorte qu'ayant depuis fort long-temps trouvé & envoyé les propositions des deux nombres 17296. & 18416. & autres pareilles, il faloit par necessité que j'eusse passé par ladite proposition. Pour vôtre application, il me semble qu'elle n'oste pas la longueur que je trouvois en cette sorte de questions, qui est la seule difficulté que j'y ay toûjours reconnuë : sinon que je ne l'aye pas bien comprise, dequoy je vous prie m'avertir & me rendre certain. Il me semble apres cela qu'il m'importe de vous dire le fondement sur lequel j'appuye les demonstrations de tout ce qui concerne les propositions Geometriques qui est tel.

Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances $-$ 1. de quelque progression que ce soit, & l'exposant de ladite puissance est sous-multiple du nombre premier donné $-$ 1. Et aprés qu'on a trouvé la premiere puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposans sont multiples de l'exposant de la premiere satisfont de méme à la question.

Exemple, soit la progression donnée,

1 2 3 4 5 6
3 9 27 81 243 729, &c.

Avec ses exposans au dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. il mesure la troisiéme puissance $-$ 1, de laquelle 3. exposant est soûsmultiple de 12. qui est moindre de l'unité que le nombre de 13. Et parce que l'exposant de 729. qui est 6. est multiple du premier exposant 3, il s'ensuit que 13. mesure aussi ladite puissance de 729 $-$ 1. Et cette proposition est generalement vraye en toutes progressions & en tous nombres premiers. Dequoy je vous envoyerois la demonstration, si je n'apprehendois d'étre trop long. Mais il n'est pas vray que tout nombre premier mesure une puissance + 1 en toute sorte de progressions. Car si la premiere puissance $-$ 1 qui est mesurée par ledit nombre premier a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance + 1 dans toute la progression qui soit mesurée par ledit nombre premier.

Exemple, parce qu'en la progression double 23. mesure la puissance $-$ 1 qui a pour exposant 11, ledit nombre 23. ne mesurera aucune puissance + 1 de ladite progession à l'infini.

Que si la premiere puissance $-$ 1 qui est mesurée par le nombre premier donné a pour exposant un nombre pair : en ce cas la puissance + 1 qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers, qui ne mesurent aucune puissance + 1 en une progression donnée. Car cela sert, par exemple, à trouver que les deux nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits, & a mille autres choses, comme par exemple, d'où vient que la 37. puissance $-$ 1 en la progression double est mesurée par 223. En un mot il faut determiner quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur premiere puissance $-$ 1 & en telle sorte que l'exposant de ladite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort mal-aisé, en attendant un plus grand éclaircissemement de vôtre part, & qu'il vous plaise deffendre cét endroit de vôtre Lettre, où vous dites qu'aprés avoir trouvé que le diviseur doit étre multiple + 1 de l'exposant, il y a aussi des regles pour trouver le quantiéme desdits multiples + 1 de l'exposant doit étre le diviseur. Voicy une de mes propositions que peut-étre vous aurez aussi trouvée que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche, que

ſans doûte j'acheveray d'apprendre de vous.

En la progreſſion double, ſi d'un nombre quarré, generalement parlant, vous, oſtez 2. ou 8. ou 32. &c. les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui meſureront le reſte feront l'effet requis comme de 25, qui eſt un quarré, ôtez 2. le reſte 23. meſurera la 11. puiſſance — 1, oſtez 2. de 49. le reſte 47. meſurera. la 23. puiſſance — 1.

Oſtez 2. de 225. le reſte 223. meſurera la 37. puiſſance — 1 &c.

En la progreſſion triple, ſi d'un nombre quarré, ut ſupra, vous oſtez 3. ou 27. ou 243. &c.

Les nombres premiers & moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui meſureront le reſte feront l effet requis, comme,

Oſtez 3. de 25. le reſte 22. eſt meſuré par 11. qui eſt premier & moindre de l'unité qu'un multiple de 4. auſſi 11. meſure la 5. puiſſance — 1.

Oſtez 3. de 121. le reſte 118. eſt meſuré par 59. moindre de l'unité, &c. auſſi 59. meſure la 29. puiſſance — 1.

En la progreſſion quadruple il faut oſter 4. ou 64. &c. à l'infini en toutes progreſſions en procedant de méme façon.

J'adjoûteray encore cette petite propoſition.

Si d'un quarré vous oſtez 2. le reſte ne peut être diviſé par aucun nombre premier, qui ſurpaſſe un quarré de 2. comme prennés pour quarré 100000. duquel oſté 2. reſte 99998. je dis que ledit reſte ne peut être diviſé ny par 11. ny par 83. ny par 167. &c. vous pouvez éprouver la méme regle aux quarrez impairs, & ſi je voulois je vous la rendrois belle & generale, mais je me contente de vous l'avoir indiquée ſeulement.

Avant que finir, voicy une autre propoſition, laquelle vous fournira peut-etre quelque application, comme vous y êtez tres-heureux.

Si un nombre eſt meſuré par un autre, & que le nombre diviſé ſoit encore diviſé par un autre nombre moindre que le premier diviſeur: en ce cas, ſi vous oſtez du quotient de la ſeconde diviſion multiplié par la difference des deux diviſeurs, le reſte de la ſeconde diviſion, ce qui reſtera ſera meſuré par le premier diviſeur.

Exemple, 121. eſt meſuré par 11.

Diviſez encore 121. par 7. le quotient ſera 17. & le reſte de ladite diviſion 2.

Multipliez le quotient 17. par 4. difference du premier & ſecond diviſeur & du produit 68.

Oſtez en 2. le reſte 66. ſera auſſi meſuré par 11. premier diviſeur.

Que ſi le ſecond diviſeur eſt plus grand que le premier; en ce cas ſi vous adjoûtez au quotient de la ſeconde diviſion multiplié par la difference des deux diviſeurs le reſte de la ſeconde diviſion, ce qui reſtera ſera meſuré par le premier diviſeur.

Exemple, 117. eſt meſuré par 3.

Diviſez encore 117. par 4. le quotient ſera 29. & le reſte de ladite diviſion 1.

Adjoûtez au quotient 29. multiplié par la differencce des diviſions qui ne change icy rien, parce que c'eſt l'unité, le reſte de ladite diviſion qui eſt 1. la ſomme 30. ſera auſſi meſurée par 3. premier diviſeur.

J'ay déja trop écrit, & il me ſemble qu'il eſt temps que vous parliez aprés avoir employé ſi mal vôtre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je ſuis &c.

Lettre de Monsieur de Roberval à Monsieur de Fermat.

Du 4. Aoust 1640.

MONSIEUR,

Encore que depuis prés de trois ans je n'aye eu l'honneur d'ayoir commerce avec vous, je n'ay pourtant pas esté privé entierement du plaisir que je reçois de vos speculations Mathematiques. Car le Pere Mersenne m'a fait la faveur de me communiquer la plus grande partie des Lettres qu'il a receües de vous depuis ce temps là, dans lesquelles, j'ay reconnu une augmentation continüelle, & tres-sensible en la beauté & solidité de vos pensées, ausquelles il n'y a rien que d'admirable, soit sur le sujet de la Geometrie ou de l'Arithmetique: sur tout je suis ravi de vôtre invention (de minimis & maximis) & du moyen par lequel vous l'appliquerez à la recherche des touchantes des lignes courbes, & ne croy pas que jusques icy il se soit veu rien sur ce sujet, qui ne cedat de beaucoup à ce que vous nous en avez donné: car l'invention de Mr. Descartes, à laquelle j'assigne le premier lieu apres la vôtre, n'en aproche que de bien loin, parce que quoy qu'elle puisse être rendüe universelle, ce qu'il n'a pas fait & le pourra maintenant à l'imitation de vôtre derniere addition, toutesfois elle est sans comparaison plus longue, plus embarrassée & plus difficile. Je vous diray que j'ay d'autant plus admiré vôtre invention, qu'à peine croyois-je que pour trouver les touchantes des lignes courbes, qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes, ou partie à des droites, & partie à des courbes, on peut s'en servir, ce que Monsieur Descartes advoüe de la sienne sur le sujet de la roulette & autres lignes pareilles, lesquelles pour cette consideration il rejette de la Geometrie, sans raison, puis qu'à l'imitation de vôtre derniere addition, sa methode peut étre rendüe universelle comme la vôtre, mais avec une difficulté, laquelle bien souvent ne se pourroit presque surmonter par un esprit humain. Cette opinion fut cause que quand je vis que vous aviés trouvé les touchantes de la roulette, & que vous assuriez avoir la regle universelle pour toutes les lignes courbes, je creus qu'elle ne pouvoit être autre que celle que j'avois inventée au temps méme que j'inventay cette roulette, laquelle regle ou methode je n'avois encore communiqué à personne m'étant contenté d'en ayoir demonstré les effets à Monsieur Paschal en la tangente de la quadratrice qui se trouvoit des plus difficiles, y joignant la demonstration Geometrique comme a fait Archimede en celle de la spirale, laquelle par ma methode s'expedie en deux mots. J'avois fait la méme chose en la Cissoide, & avois demonstré de plus que ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature, & ont des asymptotes paralelles entr'elles, ce qu'on m'a assuré avoir esté déja demonstré par un Auteur dont on ne m'a peu dire le nom. J'ay aussi demonstré les tangentes des lignes courbes qui se décrivent avec un compas sur la superficie d'un Cylindre, puis se reduisent en plan, & en general celles de toutes les lignes courbes qui ont peu venir à ma connoissance, & cette methode est tellement differente de la vôtre (contre ma premiere opinion) qu'elles ne se ressemblent en rien qu'en la conclusion. Depuis Monsieur Mydorges faisant quelques difficultez sur la vôtre, je luy en donnay la solution, & en méme temps je luy ouvris les principes de la mienne, & luy en fis voir un essay en la Cissoide: si je sçay que vous l'ayés agreable je vous en écriray. Elle n'est pas inventée avec une si subtile & si profonde Geometrie que la votre, ou celle de Monsieur Descartes, & partant elle paroit avec moins d'artifice; en recompense elle me semble plus simple, plus naturelle & plus courte, de sorte que pour toutes les touchantes dont j'ay parlé il ne m'a pas mé-

mes esté besoin de mettre la main à la plume. Depuis cette invention je me suis appliqué aux lieux solides (ad tres & ad quatuor lineas) lesquels j'ay entierement restituez, quoy que pour n'y rien oublier, il ne faille gueres moins de discours qu'aux six premiers livres des elemens. C'est dequoy je vous entretiendray une autre fois, parce qu'il y a quelque chose qui me semble le meriter. En suite j'ay consideré la percussion, le mouvement, & les autres effets, que cause quelque impression soit violente ou naturelle, en quoy je ne croy pas avoir mal employé le temps, puis qu'en une matiere si épineuse, encore ay-je découvert quelque chose de grande utilité, à ce que je pense, & laquelle je pourray peut-être augmenter avec le temps. J'oubliois presque à vous dire que les nombres dont vous avés déja découvert des proprietez admirables, contiennent de grands mysteres, mais pour les mieux découvrir, il faudroit être plusieurs ensemble d'accord & sans jalousie, & desquels le genie fut naturellement porté à cette speculation, ce qui est tres-difficile à rencontrer. Si ce sujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ay parlé cy-dessus, je prendray aussi plaisir à le considerer plus particulierement, esperant que vous me fairés part de vos inventions, dequoy je vous supplie en qualité de, &c.

Lettre de Monsieur de Frenicle à Monsieur de Fermat.

Du 2. Aoust 1641.

MONSIEUR,

J'étois dans l'impatience de sçavoir vôtre retour à Tolose, pour me donner l'honneur & le contentement de continüer nos conferences, lorsque le R. P. Mersenne m'en a donné advis ; j'espere qu'elles dureront plus long-temps que je ne pensois, par ce qu'il est survenu quelque chose qui m'arréte icy. J'ay mille remerciemens à vous faire de la limitation des côtez que vous m'avez envoyée, laquelle veritablement je prise fort, j'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationelle, & pour cela je m'etois contenté des raisons de 10. à 24. & à 25. mais vous l'entendez icy à l'infiny. J'avois crû par la lecture de vôtre precedente, par laquelle vous mandiez qu'il étoit aisé de la trouver, que vous pretendissiez de donner une raison rationelle pour cette limitation ; c'est ce qui m'avoit fait dire, que peut-être ne la trouveriez-vous pas si facile, parceque je la sçavois étre impossible. Je sçay que l'Algebre de ce païs-cy ce n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore icy trouvé la maniere de l'y appliquer; c'est ce qui me fait croire que vous vous estés fabriqué depuis peu quelque espece d'Analyse particuliere pour foüiller dans les secrets les plus cachez des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cét effet de celle que vous aviez accoûtumé d'employer à d'autres usages. Si la demonstration de cette limitation étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer, car si elle est trop longue, je ne voudrois pas que vous vous detournassiez de vos études à cette occasion. Cette méme raison de 1. à 1 + 2. se peut aussi appliquer à la proportion des côtez des quarrez qui composent l'hypotenuse, mais en un sens contraire à celuy des parties plus prochaines du côté impair, comme aussi elle se peut appliquer aux nombres qui composent la moitié des côtez pairs, au méme sens qu'aux parties des impairs. Je viens maintenant à ce qui regarde les triangles.

Les methodes que vous donnez, tant pour trouver les quarrez, que les côtez des triangles qui appartiennent aux hypotenuses composées sont veritablement fort belles, & vous avez la methode de si bien disposer vos regles, que cela leur donne une certaine grace, qui les fait encore agreer davantage, mais elles ne suivent pas mon intention, car je n'ay

point entendu qu'on ſe ſervit des quarrez, ny des triangles des parties des hypotenuſes compoſées, mais ſeulement deſdites parties, par exemple, je demande une maniere de trouver que 65. eſt compoſé des quarrez 64. 1. & 49. 16. ſupoſant ſeulement qu'il a 5. & 13. pour les parties premieres, ſans employer à cét effet le quarré 4. & 1. ny les côtez 3. & 4. non plus que ceux qui apartiennent à 13.

Des 4. proprietez des triangles que je vous avois propoſées, vous avez fort bien trouvé la 2. pour les 3. autres vous n'avez pas ſuivi mon intention, partant il faut que je m'éclairciſſe plus que je n'avois fait. La premiere eſt facile.

Que le triangle rectangle ſoit A B C, il le faut diviſer en deux triangles A B D, A D C, avec la perpendiculaire A D.

Et derechef le triangle A D C, en deux triangles E D C, par la perpendiculaire D E & l'autre pareillement A B D, en deux, ſçavoir, A D F. B D F, par la perpendiculaire DF.

Et derechef les triangles B D F, A D F, A D E, D E C, par les autres perpendiculaires F O, F I, E L, E N, & continüer ainſi tant qu'on voudra, & faire que toutes les lignes, & ſections d'icelles, comme A L, L I, I O, B O, O D, D N. N C, ſoint nombres entiers.

Vous donnez par apres les triangles dont le moindre côté eſt different d'un quarré de chacun des deux autres. Je ſçay bien que la moitié de ceux qui ont 1. pour difference de leurs petits côtez, ont auſſi cette proprieté, ſçavoir, ceux qui commencent par un nombre pair, mais je n'attendois pas que vous deuſſiez vous ſervir de ceux là, eſperant que vous donneriez le moyen de les trouver tous, & afin d'exclurre les ſuſdits, on pourroit ainſi propoſer le probleme.

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour difference de leur petit côté à chacun des deux autres côtez, en ſorte que l'une des differences ne puiſſe pas meſurer l'autre.

Pour l'autre proprieté des triangles, qui eſt d'avoir un autre triangle relatif en differences, en ſorte que la difference des deux grands côtez du premier ſoit celle des deux petits côtez du ſecond, & la difference des deux petits côtez du premier ſoit celle des deux grands côtez du ſecond comme on voit aux triangles.

$11.^{49}. 60.^{1}. 61.$ | $119.^{1}. 120.^{49}. 169.$

Vous n'avez pas conſideré attentivement cette propoſition, car les triangles que vous donnez,

$449,^{98}\ 351.^{71}\ 280.$ | $949.^{98}\ 851.^{431}\ 420.$

N'ont pas cette proprieté, mais en ont une autre, qui eſt que les grands côtez de châcun ont pareille difference, ſçavoir 98. & en outre que les 2. hypotenuſes ont pareille difference que les deux grands côtez, mais ce n'eſt pas ce que je demande, car aux triangles,

$11.^{49}\ 60.^{1}\ 61.$ & $119.^{1}\ 120.^{49}\ 169.$

Vous voyez que 120. & 169. n'ont pas méme difference que 60. & 61. ny 61. & 169. méme difference que 60. & 120. Il faudroit donc pour ſatisfaire à la queſtion qu'en vos triangles, il y eût méme difference de 449. à 351. que de 851. à 420. & de 351. à 280. que de 949. à 851.

Vous me propoſez par aprés de trouver un nombre qui ſoit polygone autant de fois qu'on voudra & non plus. Je vous diray qu'il y a quelques années que je m'étois mis a la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'adviſay, que les figures qui ſont maintenant en uſage ſont ſi extravagantes, lors qu'on les veut mettre en pratique, j'entens quand on les veut repreſenter avec des jettons, ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimeres, ou croteſques, que figures, leſquelles ſi elles ne ſont entierement regulieres, au moins doivent elles en aprocher le plus que faire ſe peut.

Cela fut cauſe que je quittay ce que j'avois commencé pour me mettre à reformer ces figures, & Dieu m'a fait la grace d'y reüſſir en quelque façon, car j'ay trouvé une maniere de faire des figures regulieres en nombres d'une infinité de ſortes, & d'autres

aussi qui n'ont point d'angles ingrediens de tant de côtez qu'on voudra. J'ay en suite consideré quelques-unes de leurs proprietez, & ce qui depend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arresté aux figures communes, que je nommerois plûtôt progression de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles, par lequel elles sont formées. Je croy bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en estez vous pas encore advisé ; mais pour les communes, on peut considerer vôtre question en deux manieres.

La premiere, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte, qu'il envelope tous les polygones inferieurs, c'est à dire que si ce nombre est par exemple Eptagone il doive aussi être Exagone, Pent. Quarré, & triangle; & ainsi pour avoir un nombre qui fut 7. fois polygone, il en faudroit donner un qui fut figure de 9. 8. 7. 6. 5. 4. & 3. côtez ; ce qui seroit à la verité fort difficile, & il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres qui sont seulement triangles, quarrez, & pentagones deviennent incontinent fort grands, & c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre consideration est, qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non ; je n'ay pas encore recherché cela ; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

L'autre question que vous me faites contient deux problémes, l'un de choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra, & non plus.

L'autre est de determiner à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtez.

Pour soudre ces problemes, il faut considerer que tout nombre premier different de l'unité d'un nombre divisible par 8. est la somme des deux petits côtez d'un triangle, & tout nombre qui est la somme des deux petits côtez d'un triangle, auquel les côtez sont premiers entr'eux differe de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondemens il faut faire la méme chose avec ces nombres, qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs + 1. pour trouver ce qui est requis par les problemes si on demandoit des hypotenuses, au lieu de la somme des deux petits côtez ; il seroit superflu de deduire cela plus au long, intelligenti loquor. Si vôtre methode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, & aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtez ; sans avoir les quarrez & doubles quarrez, dont elle est la difference ; car ces sommes ont cette propieté d'être toûjours deux fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, & si cette somme est un nombre composé d'autres de méme nature, comme 119. composé de 17. & 7. il sera 4. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la méme chose pour l'enceinte entiere des triangles, que pour la somme des deux petits côtez.

Sur le sujet des triangles, voicy ce que je vous proposeray encore.

Une hypotenuse composée étant donnée avec les quarrez premiers entr'eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221. soit l'hypotenuse donnée, avec les quarrez qui la composent, sçavoir 100. 121. & 196. 25. il faut trouver par le moyen d'iceux que 221. à 13. & 17. pour parties.

J'attens de vous la maniere de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances − 1. en toute analogie, & principalement en celle de 2. Je suis, &c.

Lettre

Lettre de M. de Frenicle à M. de Fermat.

Du 6. Septembre 1641.

MONSIEUR,

Vôtre regle pour trouver les triangles pareils à 11. 60. 61. & 119. 120. 169. est fort bonne, je m'étois seulement arrété à l'exemple, sans la considerer autrement, mais celle que vous mettez en suite pour les triangles dont le moindre côté differe d'un quarré des 2. autres, sert à la verité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous ainsi que vous pretendez, car prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré + 1. de quelque nombre au double − 2. du méme nombre, on ne trouvera pas les triangles, qui se font par 29. & 12. ou par 60. & 293. & une infinité d'autres, mais on les trouvera tous par la regle que vous mettez en l'écrit particulier que vous avez envoyé, qui se fait metant pour un des nombres constitutifs du triangle un nombre composé de 2. quarrez premiers entr'eux, & de divers ordres.

Et cette derniere methode sert à trouver tous les primitifs dont les côtez du quarré sont comme d'un nombre impair à un autre nombre ; par exemple on trouvera par icelle qu'il y a 2. triangles, où les côtez quarrez sont comme de 65. à un autre nombre, & dont le moindre côté est different d'un quarré des 2. autres, sçavoir les deux qui sont faits de 65. & 14. & de 65. & 24. & les autres qui sont en méme proportion. Mais si on vouloit tous les triangles primitifs dont les racines des quarrez sont comme d'un nombre pair à un impair, comme par exemple de 60. à quelqu'autre nombre, on n'y pourroit pas satisfaire par cette 2. regle sinon aprés un long tatonement, & la 1. regle ne donne que la raison de 60. à 1861. Mais il y a encore 3. autres proportions outre cellelà, qui ont toutes 60. pour un de leurs termes. J'ay 2. regles differentes, dont chacune donne tous les triangles susdits, avec cette difference, que l'une regarde la proportion qui commence par un pair, & l'autre celle qui commence par un impair, & celle-cy n'est pas beaucoup differente de vôtre derniere, car ayant pris un triangle primitif, je me sers de son hypotenuse pour le premier terme, & pour l'autre j'ôte d'un des côtez du triangle la difference de l'autre côté à l'hypotenuse. Exemple.

Que 20. 21. 29. soit le triangle, 29. le premier terme, pour l'autre j'ôte de 20. la difference de 21. à 29. ou de 21. la difference de 20. à 29. & restera 12. on aura donc 29. & 12. dont les quarrez composeront le triangle cherché.

Vôtre premiere regle pour trouver 3. quarrez en proportion Arithmetique à le méme defaut que la precedente, car on ne les peut pas trouver tous par icelle, par exemple, on ne trouvera pas le quarré de 1. 29. 41. ou de 17. 53. 73. mais par la proposition que vous mettez en l'écrit particulier on les peut tous comprendre. Vous pouviez aussi donner aisement par la 1. regle le 3. quarré sans obliger à prendre la difference des 2. quarrez trouvez ; comme en l'exemple que vous apportez le quarré − 2. de 5. est 23. le quarré suivant + 1. est 37. si on veut avoir le 3. nombre, il faut adjoûter à 37. le double de 5. & on aura 47.

Si on prenoit 4. son quarré − 2. est 14. le quarré suivant + 1. est 26. auquel adjoûtant 8. double de 4. on aura 34. les 3. nombres étant reduits sont 7. 13. 17.

La methode dont je me sers pour trouver ces 3. quarrez proportionaux est toute autre que celle-là, & voicy comme on procede pour les avoir tous. L'hypotenuse de tout triangle primitif sera le côté du moyen quarré, la difference des 2. côtez du triangle sera le moindre côté, & leur somme sera le plus grand.

Exemple. Que le triangle soit 28. 45. 53. le moyen côté sera l'hypotenuse 53. la difference de 28. à 45. qui est 17. sera le moindre & leur somme 73. sera le plus grand, on aura donc 17. 53. 73. pour les racines des quarrez cherchez. Et si on prend tous les triangles commençant par le premier 3. 4. 5. on aura tous lesdits quarrez.

Aprés cette regle generale j'en ay consideré deux particulieres, dont l'une est celle que vous proposez en l'écrit particulier, sçavoir que le moindre des 3. quarrez demeurant toûjours le méme, on ait les 2. autres en une infinité de façons, & à laquelle vous croyez que je n'ay pas pris garde, quoy qu'il y ait déja long-temps que je l'ay trouvée, lorsque je travaillois aux triangles rectangles,

Que tout nombre & chacun d'iceux est la difference des 2. moindres côtez d'une infinité de triangles ;

Et tout nombre premier different de l'unité d'un multiple de 8. ou composé desdits nombres premiers seulement, est la difference des moindres côtez d'une infinité de triangles rectangles primitifs.

Et y ayant des voyes certaines pour trouver tous les triangles qui ont une méme difference en leurs moindres côtez, on aura aisement tous les quarrez susdits. Sur quoy il faut remarquer que si le nombre proposé, qui doit être la racine moindre du quarré de 3. & qui doit être la difference des deux petits côtez du triangle n'est divisible que par un seul nombre premier different de 1. d'un octonaire comme sont 7. 49. 343. 17. 289. &c. le nombre sera la difference des petits côtez de 2. triangles qu'on peut nommer Surprimitifs, pource qu'ils sont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, & ces deux triangles sont toûjours les moindres, dont l'un commence par un pair, & l'autre par un impair, & d'iceux se forme l'infinité des autres. Voicy la maniere dont je me sers.

3.	2.	4.	1.
8.	3.	9.	4.
19.	8.	2.	9.
46.	19.	53.	22.

Si je veux par exemple avoir tous les triangles qui ont 7. de difference entre leurs moindres côtez je cherche les deux premiers triangles qui ont cette difference, & trouve 5. 12. 13. & 8. 15. 17. je prens les racines des quarrez de chaque triangle, sçavoir 3. 2. & 4. 1. & mets chaque couple en teste d'une colomne. J'ay donc pour le 1. 3. 2. Pour avoir le triangle suivant je prens la plus grande racine du 1. pour la moindre du 2. sçavoir 3. & pour la plus grande je prens le double de la plus grande du 1. + la moindre, ainsi j'auray 8. qui est double de 3 + 2. ce 8. sera la moindre racine du 3. triangle, & la plus grande dudit 3. sera 19. qui est double de 8 + 3. on fera la méme chose à l'autre couple 4. 1. & on poursuivra aussi loin qu'on voudra.

Ayant donc tous les triangles qui ont 7. pour difference de leurs moindres côtez, il sera facile, parce qui a esté dit cy-devant de trouver tous les quarrez arithmetiquement proportionaux, dont le moindre est 49. Si le susdit moindre quarré étoit divisible par 2. nombres premiers de méme nature que les susdits il y auroit 4. souches, dont tous les triangles dependroient ; s'il étoit divisible par 3. nombres premiers, il y en auroit 8. qui ne dependroient point l'un de l'autre, &c. Ainsi 161. composé de 7. & 23. est la difference des petits côtez des triangles surprimitifs 19. 180. 181. | 60. 221. 229. | 279. 440. 521. | & 400. 561. 689. & de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs, qui auront le méme 161. pour difference, & partant le quarré de 161. sera le moindre quarré des 3. proportionaux en une infinité de sortes. Il faut excepter l'unité de ce qui a esté dit, car elle sert bien de difference à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une seule souche, qui est le triangle 3. 4. 5. d'où dependent tous les autres ; on aura

7.	13.	17.	7.	17.	23.
7.	73.	103.	7.	97.	137.
7.	425.	601.	7.	565.	799.
7.	2477.	3503.	7.	3293.	4657.

donc les quarrez proportionaux, dont les racines sont icy ; & on les peut continüer tant qu'on voudra en continüant les triangles. Voila donc pour la 1. chose qui appartient ausdits quarrez.

La 2. est de trouver lesdits 3. quarrez en telle sorte qu'ils soient comme enchainez l'un à

l'autre, & que le dernier & plus grand des 3. soit le 1. des 3. suivans, comme on peut voir en ces colomnes, la fabrique desquelles je vous envoiray au premier voyage; toutefois j'estime que par l'inspection vous la jugerez aisément.

1.	5.	7.	7.	17.	23.	1.	29.	41.
7.	13.	17.	23.	37.	47.	41.	85.	113.
17.	25.	31.	47.	65.	79.	113.	173.	217.
31.	41.	49.	79.	101.	119.	217.	293.	353.
49.	61.	71.	119.	145.	167.	353.	445.	521.
71.	85.	97.	167.	197.	223.	521.	629.	721.
97.	113.	127.						

Il y a aussi des voyes pour avoir les differences égales desdits quarrez, car en la 1. colomne si on multiplie 24. par les sommes de tous les quarrez, lesquelles sommes sont 1. 5. 14. 30. &c. on aura les differences des quarrez. Et en la seconde colomne il faudroit multiplier 24. par les sommes des seuls quarrez impairs; il y a d'autres choses à considerer là dessus, que je n'ay pas maintenant le loisir de deduire plus au long.

Me voicy maintenant à l'endroit de vôtre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui sont la somme des deux petits côtez d'un triangle, & sur ce sujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne sceusse pas que chacun de ces nombres peut servir de difference à une infinité de quarrez & de doubles quarrés; vous vous estez fondé sur un advertissement que je donnois, que lesdits nombres sont toûjours 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, mais je n'ay pas dit qu'ils fussent seulement 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, comme vous croyez avoir leu; il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres, pour ne s'étre pas apperceu d'abord que 7. est 4. fois la difference entre de fort petits nombres, sçavoir entre 1. & 8. | 2. & 9. | 18. & 25. | 25. & 32. & je ne vous ay pas cotté cela pour une proprieté desdits nombres; mais vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné est la somme des côtez, sans avoir les quarrez, & doubles quarrez, dont il est la difference, il faloit vous advertir que lesdits nombres étoient toûjours 2. fois la difference d'un quarré, & d'un double quarré, car il y a 2. couples dont je me sers pour avoir ledit triangle, par exemple pour avoir le triangle dont 7. est la somme des 2. côtez je me sers de 1. & 8. & de 2. & 9. & pour ce que j'étois pressé je n'eus pas le loisir de m'éclaircir d'avantage, je n'entens pas que lesdits couples soient 2. 9. & 18. 25. comme vous avez creu, mais 1. 8. & 2. 9. & ce que j'observe en cecy est que lesdites sommes sont 2. fois la difference d'un quarré & d'un double quarré, en chaque couple desquels il y a un nombre moindre que la difference donnée; sçavoir à un des couples le quarré est moindre, & à l'autre couple c'est le double quarré; cela s'observe toûjours ainsi; & aux nombres qui sont composez de 2. nombres premiers comme 119. il y a 4. couples, dont un des nombres est moindre que 119. Et voilà la methode dont je me sers pour voir quels sont les couples utiles pour faire les triangles, car ce sont ceux ausquels un des nombres est moindre que la difference. Ainsi à 17. les 2. couples utiles sont 1. 18. & 8. 25. à chacun desquels couples il y a un nombre moindre que 17. & selon vôtre methode méme on se servira aussi bien de 1. 18. que de 25. 8. car si à 25. 8. on prend 2. & la difference de 5. à 2. de méme à 1. 18. on aura 3. & la difference de 1. à 3. & on aura en l'une & l'autre sorte les mémes nombres 2. 3. De mémes si on donnoit 161. on auroit 4. couples, sçavoir 1. 162. | 8. 169. | 81. 242. | 128. 289. a chacun desquels il y a un nombre moindre que 161. & pour trouver les triangles je me sers des racines des doubles quarrez, car elles sont les racines des quarrez qui composent l'hypothenuse, ainsi à 17. on aura 2. & 3. racines des doubles quarrez 8. 18. mais quand il y en a 4. comme à 161. je prends les extremes, sçavoir 9. 8. & celles du milieu 2. 11. qui donneront les triangles 17. 144. 145. & 44. 117. 125. Pour avoir le côté pair du triangle il faut prendre le double du produit des racines susdites des doubles quarrez, ainsi le double de 9. par 8. est 144. & le

double de 2.par 11. eſt 44. mais pour le côté impair on prend le produit des racines des quarrez ſimples;ainſi 1.par 17. donne 17. & 9.par 13. donne 117. le 1. pour le triangle 17.144.145. le 2. pour 44.117. 125. Vous voyés ſi j'ay eu raiſon de dire que les nombres ſuſdits ſont la difference de 2. couples quand ils ſont premiers, & de 4. couples lors qu'ils ſont diviſibles par 2. nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux eſt la façon de trouver tous les couples dont un deſdits nombres eſt la difference; car ſelon ma methode il eſt neceſſaire d'avoir ces deux couples qui ſont comme 2. ſouches. Exemple.

1.	162.	1.	9.
169.	8.	13.	2.
81.	242.	9.	11.
289.	128.	17.	8.

On me demande tous les quarrez & doubles quarrez dont 7. eſt la difference. Je cherche les 2. couples utiles à chacun deſquels il y a un nombre moindre que 7. j'auray 1.8. & 9. 2. je prens leurs racines & en fais 2. colomnes ſeparées comme on voit icy, & mets en chaque colomne les racines des quarrez d'un côté, & celles des doubles quarrez de l'autre. J'ay donc d'un côté 1.2. pour avoir les racines des couples ſuivans. Je prens la ſomme de 1. 2. qui eſt 3. pour la racine du double quarré; & la ſomme des racines des deux doubles quarrez prochains pour la racine du quarré. Ainſi la ſomme de 1. 2. eſt 3. & celle de 3. 2. eſt 5. j'ay donc 5. & 3. pour le 3. couple, la ſomme de 5. 3.eſt 8. celle de 8.& 3. eſt 11. On pourſuit ainſi autant qu'on veut, & l'autre colomne qui commence par 3. 1.ſe fait de méme. A chaque colomne la rangée de main droite dont les nombres ſont pairs & impairs alternativement contient les racines des doubles quarrez, leſquels ſont plus grands que les quarrez, lors que la racine du double quarré eſt paire comme 1. 2. & 11. 8. mais le double quarré eſt moindre quand ſa racine eſt impaire; ce qui a lieu lorſque le moindre quarré des 2. qui compoſent l'hypotenuſe du triangle dont ladite difference eſt la ſomme des côtez, eſt impair, comme à 3. 4. 5. mais c'eſt le rebours, quand le moindre quarré eſt pair comme au triangle 5. 12. 13. Je laiſſe le reſte pour le premier voyage, auquel je vous envoyeray auſſi la methode dont je me ſers pour former les triangles relatifs en difference, comme 11. 60.61.& 119. 120. 169. car je ne me ſers pas des 3.quarrez proportionaux. Voicy ſeulement ce que je vous propoſeray.

Quarrez	Doubles quarrez.
1.	2.
5.	3.
11.	8.
27.	19.
65.	46.
157.	111.

Quarrez	Doubles quarrez.
3.	1.
5.	4.
13.	9.
31.	22.
75.	53.
181.	128.

1. Trouver le moindre nombre qui ſoit autant de fois qu'on voudra, & non plus la ſomme de 2. quarrez.

2. Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la difference des deux moindres côtez, il reſte un quarré. Par exemple ſi le triangle cherché étoit 7. 24. 25. il faudroit qu'ôtant 98. de 289. le reſte 191. fut un quarré.

3. Trouver un nombre qui ſerve d'hypotenuſe à tant de triangles qu'on voudra & non plus, à chacun deſquels le produit du moindre côté par l'hypotenuſe ſoit plus grand que le quarré du moyen côté.

4. Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrez conſtitutifs du triangle doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles ayent la proprieté du 3. probleme.

Pour cecy il y a autant de danger que les racines pechent en excez, qu'en defaut, mais elles ont un eſpace aſſez grand pour s'égayer, & elles ne ſont pas génées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines ſont en proportion double, ou moindre, ou ſi elles ſont en proportion triple, ou plus grande, les triangles n'auront pas ladite proprieté. Entre ces deux proportions il y a un grand eſpace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'eſt pas

si grand que la difference & intervalle des proportions double, & triple, mais est un peu plus retrecy.

Vous n'avez pas pris garde, que je vous avois proposé par ma precedente de faire la méme chose de l'enceinte entiere du triangle que vous demandiez de la somme des 2. moindres côtez. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat au Reverend Pere Mersenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

Je vous dois deux réponses pour les deux dernieres Lettres que j'ay receuës de vôtre part, & que j'ay trouvées toutes deux en méme temps à mon retour de la campagne, le sujet de la premiere concerne Monsieur Des-Argues, & celuy de la seconde Monsieur de Frenicle. Je suspens la réponse aux questions de Monsieur Des-Argues jusques à ce que j'auray veu par vôtre faveur le troisiéme Livre des Coniques de Mr. Mydorge, & les autres s'il y en a d'imprimez depuis les deux premiers qui sont les seuls que j'ay en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'estendre sur tout ce qu'il semble que vous desirés de moy, & cependant je suis obligé de vous dire que j'estime beaucoup Monsieur Des-Argues, & d'autant plus qu'il est luy seul inventeur de ses Coniques. Son livret qui passe, dites vous, pour jargon, m'a parû tres-intelligible & tres-ingenieux. Pour Monsieur de Frenicle ses inventions en Arithmetique me ravissent, & je vous declare ingenüement que j'admire ce genie, qui sans ayde d'Algebre pousse si avant dans la connoissance des nombres entiers, & ce que j'y trouve de plus excellent consiste en la vitesse de ses operations, dequoy font foy les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aisance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ses routes, je luy en aurois tres-grande obligation, & ne fairois jamais difficulté de l'advoüer, car les voyes ordinaires me lassent, & lors que j'entreprens quelqu'une de ces questions, il me semble que je vois devant moy

Magnum maris æquor arandum,

à cause de ces frequentes divisions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'est pas que mon Analyse soit defectueuse, mais elle est lente & longue pour ce regard, & j'ose dire sans vanité que si je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choses, je voudrois avoir merité par mes services la faveur que je luy demande, & ne desespere pas méme de la payer par quelques inventions qui peut étre seront nouvelles à Monsieur Frenicle.

Je viens aux propositions des quarrez. Sur quoy je vous puis protester que je n'ay jamais veu, ny Stiphelius, ny cette clavicule, & ne sçay ce que ces Livres contiennent, & pour faire voir que j'ay veu peut-étre plus loin qu'eux, & satisfaire à la semonce de Monsieur Frenicle, je vous envoye le quarré de 14. aux conditions requises, duquel si vous ôtez deux enceintes. le restant sera aussi quarré aux conditions requises, & si vous ôtez encore deux enceintes de ce restant, ce qui restera sera encore quarré aux mémes conditions.

Le 1. Quarré fait en ses lignes 1379.

Le 2. fait 985.

Le 3. fait 591.

Or ne doutés point que je ne possede la methode generale pour faire toute sorte de

quarrez en cette sorte, & aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra le restant soit encore quarré, &c.

Mais à n'ôter qu'une seule enceinte, je crois la question impossible, à quoy peut-étre Monsieur de Frenicle ne prît pas garde, lors qu'il me proposa d'ôter 3. enceintes de 21. & puis 2. du restant & puis une du restant, car aux deux premiers cas la question est faisable en beaucoup de manieres, mais au 3. je ne l'estime point possible, dequoy la raison dépend de ma regle, laquelle je n'ay pourtant ny trouvée, ny cherchée que depuis que j'ay receu la Lettre de Monsieur Frenicle, & c'est pour cela que je ne determine pas absolûment l'impossibilité de ce cas jusqu'à ce que j'auray eu encore quelques jours pour y songer de nouveau.

Mais ce que je trouve de plus beau en ma regle, & que je ne crois pas avoir esté touché ny par Stiphelius, ny par aucun autre, est que je puis determiner en combien de façons & non plus châque quarré peut-étre disposé aux conditions requises, comme par exemple s'il m'est permis de demander à Monsieur Frenicle en combien de sortes differentes 22. peut étre rangé.

Je passe bien plus outre en passant aux solides qui le sont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longueur, que de hauteur, fassent un méme nombre, & determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit étre rangé, ce qui est, ce me semble, une des plus belles choses de l'Arihmetique, vous en trouverez un exemple sur le cube 64. à côté du quarré de 14.

Il faut ranger les 4. quarrez qui font la solidité du cube, en telle façon que le 1. soit dessous, & le second soit mis sur le premier, en telle façon que 53. soit sur 4. & 56. sur 1. Il faut ensuite mettre le 3. sur le 2. en telle façon que 60. soit sur 53. & 57. sur 56. & enfin il faut mettre le 4. sur le 3. en sorte que 13. soit sur 60. & 16. sur 57. Cela étant fait vous aurés un cube qui sera divisé en 12. quarrez, lesquels se trouveront tous disposez aux conditions requises, & il y aura en tout 72. lignes differentes, desquelles chacune faira une méme somme, sçavoir 130.

Vous voyez combien cecy est au dessus du Tetraedre & de l'Hexagone de Monsieur Frenicle, desquels le premier n'est pas solide en effet, mais par fiction seulement, quoy que je ne doûte pas qu'il ne puisse étre haussé en solide: mais dans ces deux propositions il y a beaucoup de nombres superflus dans les entre-deux des lignes qui aboutissent ou au sommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne sont pas si parfaites que la mienne en laquelle je puis encore ôter les enceintes requises & faire que le restant demeure aussi cube, &c. Je soûmets pourtant le tout a mondit Sieur de Frenicle, & crois que si j'avois l'honneur d'étre connu de luy, il auroit obmis quelques paroles qui sont dans sa Lettre. Je ne resteray pas de luy asseurer l'estime que je fais de luy, & de le conjurer de me faire part de sa methode. Pour le solide de la roulette, je le reduirois bien à des solides plus simples, mais à des Sphæres, cones, ou cylindres qui soint creés par des lignes droites données, il me semble qu'il est impossible: excusez si le papier me manque, &c.

Depuis ma Lettre écrite un de mes vieux papiers m'est tombé en main, lequel contient une observation sur le probleme 21. du Livre de Bachet imprimé à Lyon 1624. & qui porte pour titre, Problemes plaisans & delectables qui se font par les nombres.

Voyés l'endroit où il propose de ranger en quarré les nombres consecutifs en progression Arithmetique, en sorte que tous les rangs tant de haut en bas, qu'à côté & par les diametres fassent une méme somme, dequoy il baille une regle generale pour les quarrez impairs, & avoüe n'en avoir peu trouver aucune pour les pairs, mais avoir seulement fait plusieurs observations particulieres par le moyen desquelles il a rangé les pairs jusques à 144.

Or pour la regle des quarrez impairs, je dis premierement qu'elle n'est pas de son invention, car elle est dans l'Arithmetique de Cardan, mais d'ailleurs elle ne resout la

queſtion que d'une ſeule façon qui le peut étre en pluſieurs. Je dis donc que ma methode range les quarrez pairs, & impairs à l'infiny.

2. Qu'elle les range en toutes les façons poſſibles, leſquelles augmentent comme les combinaiſons à meſure que les quarrez ſont plus grands.

3. Que la regle des pairement, impairs n'eſt pas differente de celle des pairement pairs, mais bien la méme, quoy que Bachet aye creu qu'elle devoit étre differente.

Voicy un exemple de ma methode.

Il range le 25. d'une ſeule façon, n'y ſçachant autre choſe, & voyez comme il le range.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

En voicy 3. autres que j'ay choiſi parmi pluſieurs que ma methode enſeigne.

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

11	24	17	10	3
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Il range le 36. à tâtons d'une ſeule façon, comme s'enſuit.

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

En voicy un autre parmi pluſieurs que ma methode fournit, ſi le temps ne me manquoit je vous en envoyerois demi douzaine.

5	31	4	33	36	2
14	18	22	21	13	23
26	7	9	10	30	29
11	25	27	28	12	8
20	24	15	16	19	17
35	6	34	3	1	32

Mais parce qu on pourroit croire que la regle n'a qu'un ſeul exemple lors que les diametraux demeurent les mémes. Voicy qui fait voir le contraire. C'eſt un exemple de ma methode du 64. different de celuy de Bachet, & qui garde pourtant les diametraux.

1	7	6	60	61	59	58	8
16	10	51	52	53	54	15	9
17	47	19	45	44	22	18	48
40	34	38	28	29	27	31	33
32	26	30	36	37	35	39	25
41	23	43	21	20	46	42	24
56	50	11	13	12	14	55	49
57	63	62	5	4	3	2	64

En voilà aſſés pour donner de l'exercice à Monſieur de Frenicle, car je ne ſçay gueres rien de plus beau en l Arithmetique que ces nombres que quelques uns appellent Planetarios, & les autres Magicos; & de fait j'ay veu pluſieurs Taliſmans ou quelques-uns de ces quarrez rangez de la ſorte ſont décrits,& parmy pluſieurs un grand d'argent, qui contient le 49. rangé ſelon la methode de Bachet, ce qui fait croire que perſonne n'a encore connu la generale ny le nombre des ſolutions qui peuvent arriver à chaque quarré; ſi la choſe eſt ſceuë à Paris, vous m'en éclaircirez, en tout cas je ne la dois qu'à moy ſeul. Je ſuis, &c.

Lettre de Monſieur de Fermat au Reverend Pere Merſenne de l'Ordre des Minimes. A Paris.

MON REVEREND PERE,

J'ay receu avec grande ſatisfaction vôtre Lettre accompagnée de celle de Monſieur Frenicle, qui me confirme en l'eſtime que je faiſois de luy. J'y répons ſuccinctement, & premierement ſur ce qu'il a doûté que j'euſſe une methode generale pour ranger tous les quarrez pairs à l'infiny,je vous prie de l'aſſurer du contraire,car il eſt tres-certain qu'il y a plus de 10. ans que je la découvris, & en donnay dés lors des exemples ſur des quarrez plus hauts que ceux de Bachet comme Mr. Deſpagnet vous pourroit témoigner. Il eſt vray que je n'avois pas ſongé de determiner exactement en combien de façons ces quarrez pouvoient étre ordonnez, & j'avoüe que je n'avois pas veu toutes les manieres qui y conduiſent, puiſque je doûtois méme que le quarré peut demeurer Magique en levant une ſeule enceinte, mais ayant trouvé une regle pour les ordonner en beaucoup de façons, je creus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me ſemble excuſable, puiſque je vous envoyay ma Lettre auſſi-tôt aprés la premiere meditation que j'eus fait ſur ce ſujet. Dépuis que j'ay receu la derniere de Monſieur Frenicle, j'ay auſſi-tôt découvert que la queſtion du quarré 22. étoit de ma portée, & pour ce que l'operation ſeroit trop longue qui conſiſte à ranger le quarré de 22. en telle ſorte que levant 3. enceintes il reſte Magique, & du reſtant encore 2. & qu'il demeure Magique, & puis une ſeule du reſte à la méme condition, je me contenteray pour ce coup de vous envoyer le quarré qui reſte aprés les trois premieres, & les 2. ſecondes enceintes ôtées, duquel ſi vous levez une ſeule enceinte le reſte demeure Magique comme vous verrez.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	254	253	255	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	003	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	223	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	109	367	368	358

Parce que le temps me manque je differe à vous envoyer les 5. enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22. juſques au départ du prochain Courrier.

Aprés

Aprés cela vous devés croire que dés que j'auray loisir, j'iray aussi avant sur ce sujet qu'il est possible.

Pource qui est des cubes, je n'en sçay pas plus que Monsieur Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les Diagonales seules de quarrez que nous pouvons supposer paralleles à l'Horison, seront égales aux côtez des quarrez, ce qui n'est pas peu de chose. En attendant qu'une plus longue meditation découvre le reste, je dresseray celuy de 8. 10. ou 12. à ces conditions si Monsieur de Frenicle me l'ordonne.

Pour les quarrez qui ont des cellules vuides j'y travailleray au plûtôt.

Ce que j'estime le plus est cét abbregé pour l'invention des nombres parfaits, à quoy je suis resolu de m'attacher, si Monsieur Frenicle ne me fait part de sa methode. Voicy trois propositions que j'ay trouvées, sur lesquelles j'espere de faire un grand bastiment.

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procedent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
11	12	13	2047	4095	8191	&c.			

Soient appellez les nombres parfaits, parceque toutes les fois qu'ils sont premiers ils les produisent. Mettez au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle 1. 2. 3. &c. qui soient appellez leurs exposans.

Cela supposé, je dis,

1. Que lors que l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé, comme parceque 6. exposant de 63. est composé, je dis que 63. est aussi composé.

2. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant, comme parceque 7. exposant de 127. est nombre premier, je dis que 126. est multiple de 14.

3. Lors que l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut étre mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant, ou que le double de l'exposant. Comme parce que 11. exposant de 2047. est nombre premier, je dis qu'il ne peut étre mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22. comme 23. ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22. en effet 2047. n'est mesuré que par 23. & par 89. duquel si vous ôtez l'unité, reste 88. multiple de 22.

Voilà trois fort belles propositions que j'ay trouvées & prouvées non sans peine. Je les puis appeller les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que Monsieur Frenicle ne soit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, & sans doute ces propositions passeront pour tres-belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup épluché ces matieres, & je seray bien aise d'apprendre le sentiment de Monsieur de Roberval.

Au reste vous ou moy avons equivoqué de quelques charactéres au nombre que j'avois creu parfait, ce que vous connoistrez aisement, puisque je vous baillois 137438953471. pour son radical, lequel j'ay pourtant depuis trouvé par l'Abbregé tiré de ma 3. proposition estre divisible par 223. ce que j'ay connu à la seconde division que j'ay faite, car l'exposant dudit radical estant 37. duquel le double est 74. j'ay commencé mes divisions par 149. plus grand de l'unité que le double de 74. puis continüuant par 223. plus grand de l'unité que le triple de 74. j'ay trouvé que ledit radical est multiple de 223.

De ces Abbregez j'en vois déja naître un grand nombre d'autres, *Et mi par di veder un gran lume.*

Je vous entretiendray un jour de mon progrez si Monsieur de Frenicle ne vient au secours, & n'abbrege par ce moyen ma recherche des Abbregez, en tout cas je vous conjure de faire en sorte que Mr. de Roberval joigne son travail au mien, puisque je

me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vacquer à ces choses, je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.

MONSIEUR,

Vous m'obligez toûjours, & je connois dans la continüation de vos soins celle de vôtre affection, dequoy je vous rends mille graces. Pour la Geometrie je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité, je n'auray pourtant pas beaucoup de peine à trouver les deux de vos propositions ; pour celle de la parabole, je ne l'ay pas examinée ny tentée, je remets tout cecy à ma premiere commodité. Mais de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoye trois nombres parmy plusieurs autres que j'ay trouvés dont les parties aliquotes font le multiple.

Le nombre suivant est sous-triple de ses parties aliquotes, 14942123276641920.

Celuy-cy est sous-quadruple, 1802582780370364661760.

Et celuy-cy aussi, 87934476737668055040.

Puisque je me trouve sur cette matiere, en voicy deux que j'ay choisis parmy mes sous-quintuples.

Le premier se produit des nombres suivans multipliez entr'eux, 8388608. 2801. 2401. 2197. 2187. 1331. 467. 307. 289. 241. 125. 61. 41. 31.

Et l'autre se produit des nombres suivans multipliez entr'eux. 134217728. 243. 169. 127. 125. 113. 61. 43. 31. 29. 19. 11. 7.

En voicy encore un sous-double de ses parties de mon invention, lequel multiplié par 3. fait un sous-triple, ledit nombre est, 51001180160.

C'est parmy quantité d'autres que j'ay trouvez que j'ay choisi par advance ceux-cy pour vous en faire part, afin que vous en puissiés juger par cét échantillon. J'ay trouvé la methode generale pour trouver tous les possibles, dequoy je suis assuré que Monsieur de Roberval sera étonné, & le bon Pere Mersenne aussi, car il n'y a certainement quoy que ce soit dans toutes les Mathematiques plus difficile que cecy, & hors Monsieur de Frenicle, & peut-étre Monsieur Descartes, je doute que personne en connoisse le secret, qui pourtant ne le sera pas pour vous, non plus que mille autres inventions, dont je pourray vous entretenir une autrefois, & pour exciter par mon exemple les Sçavans du Païs où vous estez, je leur propose de trouver autant de triangles en nombres qu'on voudra, de méme aire, ce que Diophante ny Viete n'ont trouvé que pour trois seulement. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur de Fermat à Monsieur de Carcavi Conseiller au Grand Conseil. A Paris.

MONSIEUR,

Je suis marry de la perte du paquet de Monsieur de S. Martin, je luy écrivois sur le

sujet des nombres, & luy faisois part de quelques propositions, & sur tout de la suivante que Monsieur Frenicle m'avoit autrefois proposée, & qu'il m'advoüa tout net ne sçavoir point. Trouver un triangle rectangle, auquel le quarré de la difference des deux moindres côtez surpasse le double du quarré du plus petit côté d'un nombre quarré. Je luy advoüay aussi pour lors que je n'en sçavois point la solution, & que je ne voyois pas méme de voye pour y venir, mais depuis je l'ay trouvée avec autres infinies, voicy le triangle 156. 1617. 1525. Il sert à la suivante question pour laquelle Monsieur Frenicle se metoit en peine de ce prealable. Trouver un triangle rectangle duquel le plus grand côté soit quarré, & le plus petit differe d'un quarré de chacun des deux autres. Si vous jugez à propos de faire part de cette proposition à mondit sieur de S. Martin, je m'en remets à vous, je ne resteray pas de luy récrire par la premiere voye.

J'ay donné à Monsieur l'Archevéque un petit memoire de corrections sur le Theon Smyrnæus, que je croy qu'il envoyera à l'Autheur avec le manuscrit de l'Astronomie. Je seray ravy que cette occasion me serve à étre connu de Monsieur Bulliaud de qui le merite étant connu à tout le monde m'a esté pleinement confirmé par ce nouveau travail sur le Theon, où j'ay particulierement admiré la correction du Decret de Timothée, qui ne pouvoit étre deüe qu'à une main de cette importance. Je suis, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Le 29. Iuillet 1654.

MONSIEUR,

L'impatiance me prend aussi-bien qu'à vous, & quoy que je sois encore au lit, je ne puis m'empécher de vous dire que je receus hier au soir de la part de Mr. de Carcavi vôtre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ay pas le loisir de m'étendre, mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dez & des parties dans la parfaite justesse, j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la verité, apres la rencontre admirable où je me trouve avec vous; j'admire bien davantage la methode des parties que celle des dez J'avois veu plusieurs personnes trouver celles des dez, comme Mr. le Chevalier de Meré, qui est celuy qui m'a proposé ces questions, & aussi Monsieur de Roberval, mais Mr. de Meré n'avoit jamais pû trouver la juste valeur des parties ny de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion. Vôtre methode est tres-seure, & est celle qui m'est la premiere venüe à la pensée dans cette recherche. Mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ay trouvé un Abbregé, & proprement une autre methode bien plus courte & plus nette que je voudrois vous pouvoir dire icy en peu de mots. Car je voudrois desormais vous ouvrir mon cœur s'il se pouvoit, tant j'ay de joye de voir nôtre rencontre. Je voy bien que la verité est la méme à Tolose & à Paris. Voicy à peu prés comme je fais pour sçavoir la valeur de chacune des parties, quand deux joüeurs joüent par exemple en trois parties, & chacun a mis 32. pistoles au jeu.

Posons que le premier en ait deux & l'autre une, ils joüent maintenant une partie, dont le sort est tel, que si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, sçavoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties; & par consequent s'ils veulent se separer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, sçavoir chacun 32. pistoles. Considerez donc, Monsieur, que si le premier gagne il luy appartient 64. s'il perd il luy appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hazarder cette partie, & se separer sans la joüer, le premier doit dire, je suis seur d'avoir 32. pistoles, car la perte

méme me les donne, mais pour les 32. autres, peut-étre je les auray, peut-étre vous les aurez, le hazard est égal, partageons donc ces 32 pistoles par la moitié, & me donnez outre cela mes 32. qui me sont seures, il aura donc 48. pistoles & l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties, & l'autre point, & ils commencent a joüer une partie, le sort de cettte partie est tel, que si le premier la gagne il tire tout l'argent, 64. pistoles, si l'autre la gagne les voilà revenus au cas precedent, auquel le premier aura deux parties, & l'autre une, Or nous avons déja monstré qu'en ce cas il appartient à celuy qui a les deux parties 48. pistoles, donc s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi, si je la gagne, je gagneray tout, qui est 64. si je la perds, il m'appartiendra legitimement 48. Donc donnez-moy les 48. qui me sont certaines, au cas méme que je perde, & partageons les 16. autres par la moitié, puis qu'il y a autant de hazard que vous les gagnez comme moy, ainsi il aura 48 & 8. qui sont 56. pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie & l'autre point.

Vous voyez, Monsieur, que s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel, que si le premier la gagne, il aura deux parties à point, & partant par le cas precedent il luy appartient 56. s'il la perd ils sont partie à partie, donc il luy appartient 32 pistoles. Donc il doit dire si vous voulez ne la pas joüer donnez-moy 32. pistoles qui me sont seures, & partageons le reste de 56. par la moitié, de 56. ôtez 32. reste 24. partagez donc 24. par la moitié prenez en 12. & moy 12. qui avec 32. font 44.

Or parce moyen vous voyez par les simples soustractions que pour la premiere partie il appartient sur l'argent de l'autre 12. pistoles, pour la seconde autres 12. & pour la derniere 8.

Or pour ne plus faire de mystere, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, & que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entens sa valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la derniere partie de deux, est double de la partie de 3. & quadruple de la derniere partie de 4. & octuple de la derniere partie de 5. &c.

Mais la proportion des premieres parties n'est pas si aisée a trouver, elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser. Et voicy le probleme dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plaît fort.

Estant donné tel nombre de parties qu'on voudra trouver la valeur de la premiere.

Soit le nombre des parties donné par exemple 8. prenez les huit premiers nombres pairs, & les huit premiers nombres impairs, sçavoir 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14 16.

Et 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. multipliés les nombres pairs en cette sorte le premier par le second, le produit par le troisiéme, le produit par le 4. le produit par le cinquiéme, &c. Multipliez les nombres impairs de la méme sorte, le premier par le second, le produit par le troisiéme, &c. le dernier produit des pairs est le denominateur, & le dernier produit des impairs est le numerateur de la fraction qui exprime la valeur de la premiere partie de 8. C'est à dire que si on joüe chacun le nombre des pistolles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendroit sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se demonstre, mais avec beaucoup de peine par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, & je n'ay peu les demonstrer par cette autre voye que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons, & voicy les propositions qui y menent, qui sont proprement des propositions arithmetiques touchant les combinaisons, dont j'ay d'assez belles proprietez.

Si d'un nombre quelconque de Lettres, par exemple de 8. A, B, C, D, E, F, G, H, vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4. lettres, & en suite toutes les combinaisons possibles de 5. lettres, & puis de 6. de 7. & de 8. &c. & qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au tout, je dis que si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4. avec

chacune des combinaisons superieures, la somme sera le nombre tantiéme de la progression quaternaire à commencer par le binaire qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, & je vous le diray en Latin, car le François n'y vaut rien. Si quotlibet litterarum verbi gratia octo A B C D E F G H, sumantur omnes combinationes quaternarij, quinquenarij, senarij, &c. usque ad octonarium. Dico si jungas dimidium combinationis quaternarij nempe 35. (dimidium 70.) cum omnibus combinationibus quinquenarij nempe 56. plus omnibus combinationibus senarij nempe 28. plus omnibus combinationibus septenarij nempe 8. plus omnibus combinationibus octonarij nempè 1. factum esse quartum numerum progressionis quaternarij cujus origo est 2. dico quartum numerum, quia 4. octonarij dimidium est.

Sunt enim numeri progressionis quaternarij quibus origo est 2. isti, 2. 8. 32. 128. 512. &c. quorum 2. primus est, 8. secundus, 32. tertius, & 128. quartus, cui 128. æquantur + 35. dimidium combinationis 4. litterarum, + 56. combinationis 5. litterarum, + 28 combinationis 6. litterarum, + 8 combinationis 7. litterarum, + 1 combinationis 8. litterarum.

Voilà la premiere proposition qui est purement Arithmetique.

L'autre regarde la doctrine des partis, & est telle : il faut dire auparavant si on a une partie de 5. par exemple, & qu'ainsi il en manque 4. le jeu sera infailliblement decidé en 8. qui est double de 4. la valeur de la premiere partie de 5. sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numerateur la moitié de la combinaison de 4. sur 8. (je prens 4. parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, & 8. parce qu'il est double de 4.) & pour denominateur ce méme numerateur, plus toutes les combinaisons superieures.

Ainsi si j'ay une partie de 5. il m'apartient sur l'argent de mon joüeur, $\frac{35}{128}$ c'est à dire que s'il a mis 128 pistoles, j'en prens 35. & luy laisse le reste 93. Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la méme que celle-là $\frac{105}{384}$ laquelle est faite par la multiplication des pairs pour denominateur & de la multiplication des impairs pour le numerateur.

Vous verrez bien sans doûte tout cela si vous vous en donnez tant soit peu la peine. C'est pourquoy je trouve inutile de vous en entretenir davantage, je vous envoye neantmoins une de mes vieilles tables.

Je n'ay pas le loisir de la copier, je la referay, vous y verrez comme toûjours la valeur de la premiere partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisement par les combinaisons.

Vous verrez de méme que les nombres de la premiere ligne augmentent toûjours.

Ceux de la seconde de méme.

Ceux de la troisiéme de méme.

Mais en suite ceux de la 4. diminüent.

Ceux de la 5. &c.

Ce qui est étrange.

Je n'ay pas le temps de vous envoyer la demonstration d'une difficulté qui étonoit fort M...... car il a tres-bon esprit, mais il n'est pas Geometre. C'est comme vous sçavez un grand defaut, & méme il ne comprend pas qu'une ligne Mathematique soit divisible à l'infiny, & croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre finy, & jamais je n'ay peu l'en tirer, si vous le pouviez faire on le rendroit parfait.

Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison.

Si on entreprend de faire un six avec un dé il y a advantage de l'entreprendre en 4. comme de 671. à 625.

Si on entreprend de faire Sannes avec deux dez il y a desadvantage de l'entreprendre en 24.

Et neantmoins 24. est à 36. (qui est le nombre des faces de deux dez) comme 4. à 6. (qui est le nombre des faces d'un dé.)

Voila quel étoit son grand scandale qui luy faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes, & que l'Arithmetique se démentoit.

Mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous estés.

Je mettray par ordre tout ce que j'en ay fait quand j'auray achevé des traitez Geometriques où je travaille il y a déja quelque temps.

J'en ay fait aussi d'Arithmetiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander vôtre avis sur cette démonstration.

Je pose le Lemme que tout le monde sçait, que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continüée depuis l'unité comme 1. 2. 3.4. étant prise deux fois est égale au dernier 4. menée dans le prochainement plus grand 5. c'est à dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois est égale au produit de A in A + 1.

Maintenant je viens à ma proposition.

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia unitate demptâ sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum. Sint duæ radices R, S, unitate differentes, dico $R^3 - S^3 - 1$. æq. summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ: etenim S vocetur A, ergo R est A + 1. Igitur cubus radicis R, seu A + 1 est $A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3$. Cubus vero S seu A est A^3. Et horum differentia est $3A^2 + 3A + 1^3$. id est $R^3 - S^3$. Igitur si auferatur unitas, $3A^2 + 3A$ æq. $R^3 - S^3 - 1$, sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur ex lemmate A in A + 1 hoc est $A^2 + A$. Igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æq. $3A^2 + 3A$. Sed $3A^2 + 3A$ æq. $R3 - S^3 - 1$. Igitur $R^3 - S^3 - 1$ æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum : quod erat demonstrandum.

On ne ma pas fait de difficulté là dessus, mais on ma dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoûtumé aujourd'huy à cette methode, & moy je pretends que sans me faire grace on doit admettre cette demonstration comme d'un genre excellent, j'en attens neantmoins vôtre avis avec toute soumission : tout ce que j'ay demonstré en Arithmetique est de cette nature, voicy encore deux difficultez.

J'ay demonstré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre.

Je pretens que cela est purement Geometrique & dans la severité la plus grande.

De méme j'ay resolu le probleme de quatre plans, quatre points & quatre Sphæres, quatre quelconque étant donnez trouver une Sphære, qui touchant les Sphæres données passe par les points donnez, & laisse sur les plans des portions de Sphæres capables d'angles donnez, & celuy-cy.

De trois cercles, trois points, trois lignes quelconques étant donnez trouver un cercle qui touchant les cercles, & les points, laisse sur la ligne un arc capable d'angle donné. J'ay resolu ces problemes plainement n'employant dans la construction que des cercles & des lignes droites.

Mais dans la demonstration je me sers de lieux solides de paraboles ou hyperboles.

Je pretens neantmoins qu'attendu que la construction est plane ma solution est plane, & doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnoître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens, que de vous importuner si long-temps, je ne pense jamais vous dire que deux mots, & si je ne vous dis pas ce que j'ay le plus sur le cœur, qui est que plus je vous connois plus je vous admire & vous honnore, & que si vous voyez à quel point cela est, vous donneriez une place dans vôtre amitié à celuy qui est, &c.

Table dont il est fait mention dans la Lettre precedente.

Si on joüe chacun 256.

EN

Il m'appartient sur les 256. pistoles de mon joüeur pour la

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
2. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	
3. Partie.	56.	60.	64.	64.		
4. Partie.	42.	40.	32.			
5. Partie.	24.	16.				
6. Partie.	8.					

Si on joüe 256. chacun

EN

Il m'appartient sur les 256. de mon joüeur pour

	6. Parties.	5. Parties.	4. Parties.	3. Parties.	2. Parties.	1. Partie.
La 1. Partie.	63.	70.	80.	96.	128.	256.
Les 2. premieres parties.	126.	140.	160.	192.	256.	
Les 3. premieres parties.	182.	200.	224.	256.		
Les 4. premieres parties.	224.	240.	256.			
Les 5. premieres parties.	248.	256.				
Les 6. premieres parties.	256.					

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 24. Aoust 1654.

MONSIEUR,

Je ne peus vous ouvrir ma pensée entiere touchant les partis de plusieurs joüeurs par l'Ordinaire passé, & mémes j'ay quelque repugnance à le faire, de peur qu'en cecy cette admirable convenance qui étoit entre nous,& qui m'étoit si chere ne commence à se démentir,car je crains que nous ne soyons de differens avis sur ce sujet. Je vous veus ouvrir toutes mes raisons, & vous me ferez la grace de me redresser si j'erre, ou de m'affermir si j'ay bien rencontré. Je vous le demande tout de bon & sincerement, car je ne me tiendray pour certain que quand vous serés de mon côté.

Quand il n'y a que deux joüeurs vôtre methode qui procede par les combinaisons est tres-seure. Mais quand il y en a trois, je croy avoir demonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procediez de quelqu'autre maniere que je n'entens pas, mais la methode que je vous ay ouverte, & dont je me sers par tout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulieres où elle est plus courte que la generale) n'est bonne qu'en ces seules occasions, & non pas aux autres.

Je suis seur que je me donneray à entendre, mais il me faudra un peu de discours, & à vous un peu de patience.

Voicy comment vous procedés quand il y a deux joüeurs.

Si deux joüeurs joüans en plusieurs parties se trouvent en cét état qu'il manque deux parties au premier, & trois au second, pour trouver le parti il faut (dites vous) voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluëz qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joüeurs, & voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier, & combien pour le second, & partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours là si je ne l'eusse sceu de moy méme auparavant, aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joüeurs, il faut imaginer qu'ils joüent avec un dé à deux faces (puis qu'ils ne sont que deux joüeurs) comme à croix & pile, & qu'ils jettent quatre de ces dez (parce qu'ils joüent en quatre parties) & maintenant il faut voir combien ces dez peuvent avoir d'assietes differentes. Cela est aisé à supputer, ils en peuvent avoir seize qui est le second degré de quatre, c'est à dire le quarré ; Car figurons nous qu'une des faces est marquée A, favorable au premier joüeur, & l'autre B favorable au second, donc ces quatre dez peuvent s'asseoir sur une de ces seize assietes,

a a a a	1
a a a b	1
a a b a	1
a a b b	1
a b a a	1
a b a b	1
a b b a	1
a b b b	2
b a a a	1
b a a b	1
b a b a	1
b a b b	2
b b a a	
b b a b	2
b b b a	2
b b b b	2

a a a a
b b b b.

Et parce qu'il manque deux parties au premier joüeur, toutes les faces qui ont deux A le font gagner, donc il en a 11. pour luy, & parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a 3. B le peuvent faire gagner, donc il y en a 5.

Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11. à 5. Voilà vôtre methode quand il y

il y a deux joüeurs. Sur quoy vous dites que s'il y en a davantage il ne ſera pas difficile de faire les partys par la méme methode.

Sur cela, Monſieur, j'ay à vous dire que ce party pour deux joüeurs fondé ſur les combinaiſons eſt tres-juſte & tres-bon. Mais que s'il y a plus de deux joüeurs il ne ſera pas toûjours juſte, & je vous diray la raiſon de cette difference.

Je communiquay vôtre methode à nos Meſſieurs, ſur quoy Monſieur de Roberval me fit cette objection.

Que c'eſt à tort que l'on prend l'art de faire le party ſur la ſuppoſition qu'on joüe en 4. parties, veu que quand il manque 2. parties a l'un & 3. à l'autre, il n'eſt pas de neceſſité que l'on joüe 4. parties pouvant arriver qu'on n'en joüera que deux ou 3. ou à la verité peut-étre 4.

Et ainſi qu'il ne voyoit pas pourquoy on pretendoit de faire le party juſte ſur une condition feinte qu'on joüera 4. parties, veu que la condition naturelle du jeu, eſt qu'on ne joüera plus dés que l'un des joüeurs aura gagné, & qu'au moins ſi cela n'étoit faux, cela n'étoit pas demonſtré.

De ſorte qu'il avoit quelque ſoupçon que nous avions fait un paralogiſme, je luy répondis que je ne me fondois pas tant ſur cette methode des combinaiſons, laquelle veritablement n'eſt pas en ſon lieu en cette occaſion, comme ſur mon autre methode univerſelle à qui rien n'échape, & qui porte ſa demonſtration avec ſoy, qui trouve le méme party preciſement que celle des combinaiſons, & de plus je luy demonſtray la verité du party entre deux joüeurs par les combinaiſons en cette ſorte.

N'eſt-il pas vray que ſi deux joüeurs ſe trouvans en cét état de l'hypoteſe qu'il manque deux parties à l'un & 3. à l'autre conviennent maintenant de gré à gré qu'on joüe quatre parties complettes, c'eſt à dire qu'on jette les quatre dez à deux faces tous à la fois, n'eſt-il pas vray, dis-je, que s'ils ont déliberé de joüer les quatre parties le party doit étre tel que nous avons dit ſuivant la multitude des aſſietes favorables à chacun.

Il en demeura d'acord, & cela en effet eſt demonſtratif, mais il nyoit que la méme choſe ſubſiſtat en ne s'aſtreignant pas à joüer les 4. parties, je luy dis donc ainſi.

N'eſt-il pas clair, que les mémes joüeurs n'étant pas aſtreints à joüer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dés que l'un auroit atteint ſon nombre, peuvent ſans dommage ny advantage s'aſtreindre à joüer les quatre parties entieres, & que cette convention ne change en aucune maniere leur condition. Car ſi le premier gagne les deux premieres parties de quatre, & qu'ainſi il ait gagné, refuſera-il de joüer encore deux parties, veu que s'il les gagne il n'a pas mieux gagné, & s'il les perd il n'a pas moins gagné, car ces deux que l'autre a gagné ne luy ſuffiſent pas, puis qu'il luy en faut trois, & ainſi il n'y a pas aſſés de quatre parties pour faire qu'ils puiſſent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il eſt aiſé de conſiderer qu'il eſt abſolument égal & indifferent à l'un & à l'autre de joüer en la condition naturelle à leur jeu qui eſt de finir dés qu'un aura ſon compte, ou de joüer les quatre parties entieres, donc puiſque ces deux conditions ſont égales & indifferentes le party doit étre tout pareil en l'une & en l'autre, or il eſt juſte quand ils ſont obligez de joüer 4. parties comme je l'ay monſtré.

Donc il eſt juſte auſſi en l'autre cas. Voilà comment je le demonſtray, & ſi vous y prenez garde cette demonſtration eſt fondée ſur l'égalité des deux conditions vraye & feinte à l'égard de deux joüeurs, & qu'en l'une & en l'autre un méme gagnera toûjours, & ſi l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre, & jamais deux n'auront leur compte. Suivons la méme pointe pour trois joüeurs.

Et poſons qu'il manque une partie au premier, qu'il en manque deux au ſecond, & deux au troiſiéme: pour faire le party ſuivant la méme methode des combinaiſons il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu ſera decidé, comme nous avons

fait quand il y avoit deux joueurs, ce ſera en 3. Car ils ne ſçauroint joüer 3. parties ſans que la deciſion ſoit arrivée neceſſairement.

Il faut voir maintenant combien 3. parties ſe combinent entre trois joüeurs, & combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre, & combien au dernier, & ſuivant cette proportion diſtribuer l'argent de méme qu'on a fait en l'hypoteſe de deux joüeurs.

Pour voir combien il y a de combinaiſons en tout, cela eſt aiſé, c'eſt la troiſiéme puiſſance de 3. c'eſt à dire ſon cube 27.

Car ſi on jette trois dez à la fois (puis qu'il faut joüer trois parties) qui ayent chacun 3. faces, puis qu'il y a trois joüeurs, l'une marquée A favorable au premier, l'autre B pour le ſecond, l'autre C pour le troiſiéme.

Il eſt manifeſte que ces trois dez jettez enſemble peuvent s'aſſeoir ſur 27. aſſietes differentes, ſçavoir,

a a a	1		
a a b	1		
a a c	1		
a b a	1		
a b b	1	2	
a b c	1		
a c a	1		
a c b	1		
a c c	1		3
b a a	1		
b a b	1	2	
b a c	1		
b b a	1	2	
b b b		2	
b b c		2	
b c a	1		
b c b		2	
b c c			3
c a a	1		
c a b	1		
c a c	1		3
c b a	1		
c b b		2	
c b c			3
c c a	1		3
c c b			3
c c c			3

Or il ne manque qu'une partie au premier, donc toutes les aſſietes où il y a un A ſont pour luy, donc il y en a 19.

Il manque deux parties au ſecond, donc toutes les aſſietes où il y a 2. B ſont pour luy, donc il y en a 7.

Il manque deux parties au 3. donc toutes les aſſietes où il y a 2. C ſont pour luy, donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun ſuivant la proportion de 19. 7. 7. on ſe tromperoit trop groſſierement, & je n'ay garde de croire que vous le faſſiés ainſi. Car il y a quelques faces favorables au premier & au ſecond tout enſemble comme A B B, car le premier y trouve un A qu'il luy faut, & le ſecond deux B, qui luy manquent, & ainſi A C C eſt pour le premier & le troiſiéme.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui ſont communes à deux comme vallans la ſomme entiere à chacun, mais ſeulement la moitié.

Car s'il arrivoit l'aſſiete A C C, le premier, & le troiſiéme auroint méme droit à la ſomme ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié, mais s'il arrive l'aſſiete A A B, le premier gagne ſeul, il faut donc faire la ſupputation ainſi.

Il y a 13. aſſietes qui donnent l'entier au premier, & 6. qui luy donnent la moitié, & huit qui ne luy valent rien.

Donc ſi la ſomme entiere eſt une piſtole.

Il y a 13. faces qui luy valent chacune 1. piſtole.

Il y a 6. faces qui luy valent chacune $\frac{1}{2}$ piſtole.

Et 8. qui ne valent rien.

Donc en cas de party il faut multiplier,

13. Par une piſtole qui font. 13

6. Par une demy qui font. 3

8. Par zero, qui ſont. 0

Somme 27. Somme 16

Et diviſer la ſomme des valeurs 16, par la ſomme des aſſietes 27. qui fait la fraction $\frac{16}{27}$ qui eſt ce qui appartient au premier en cas de partys, ſçavoir 16. piſtoles de 27.

Le party du ſecond & du troiſiéme joüeur ſe trouvera de méme.

Il y a 4. assietes qui luy valent 1. pistole, multipliés,	4.
Il y a 3. assietes qui luy valent $\frac{1}{2}$ pistoles, multipliés,	1. $\frac{1}{2}$
Et 20. assietes que ne luy valent rien.	0
Somme 27.	Somme 5 $\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joüeur 5. pistoles & $\frac{1}{2}$ sur 27. & autant au troisiéme, & ces trois sommes 5. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{1}{2}$ & 16. étant jointees font les 27.

Voila, ce me semble, de quelle maniere il faudroit faire les partys par les combinaisons suivant vôtre methode, si ce n'est qui vous ayés quelqu'autre chose sur ce sujet que je ne puis sçavoir.

Mais si je ne me trompe ce party est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joüe en 3. parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu la est qu'on ne joüe que jusques à à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui luy manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joüe 3. parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en joüera qu'une ou deux, & rien de necessité.

Mais d'oû vient, dira t'on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la méme supposition feinte que quand il y avoit deux joüeurs?

En voicy la raison.

Dans la condition veritable de ces trois joüeurs il n'y en a qu'un qui peut gagner: car la condition est que dés qu'un a gagné, le jeu cesse; mais en la condition feinte deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties: sçavoir si le premier en gagne une qui luy manque, & un des autres deux qui luy manquent, car ils n'auront joüé que trois parties, au lieu que quand il n'y avoit que deux joüeurs la condition feinte & la veritable convenoint pour les avantages des joüeurs en tout, & c'est ce qui met l'extreme difference entre la condition feinte & la veritable.

Que si les joüeurs se trouvans en l'état de l'hypothese, c'est à dire s'il manque une partie au premier, & deux au second, & deux au troisiéme, veulent maintenant de gré à gré & convienent de cette condition, qu'on joüera trois parties complettes, & que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entiere (s'ils se trouvent seuls qui l'ayent atteint) ou s'il se trouve que deux l'ayent atteint qu'ils la partageront également.

En ce cas le party se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16. le second, 5 $\frac{1}{2}$ le troisiéme, 5 $\frac{1}{2}$ de 27. pistoles, & cela porte sa demonstration de soy mémes en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils joüent simplement à condition non pas qu'on joüe necessairement 3. parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entr'eux ait atteint ses parties, & qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17. pistoles, au second 5. au troisiéme 5. de 27.

Et cela se trouve par ma methode generale qui determine aussi qu'en la condition precedente il en faut 16. au premier 5 $\frac{1}{2}$ au 2. & 5. $\frac{1}{2}$ au 3. sans se servir des combinaisons, car elle va par tout seule & sans obstacle.

Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ay d'autre avantage sur vous que celuy d'y avoir beaucoup plus medité. Mais c'est peu de chose à vôtre égard, puisque vos premieres veuës sont plus penetrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse par de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous, Je croy vous avoir fait connoître par là que la methode des combinaisons est bonne entre deux joüeurs par accident comme elle est l'est aussi quelquefois entre trois

joüeurs, comme quand il manque une partie à l'un, une à l'autre, & deux à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux, mais elle n'est pas generale, & n'est bonne generalement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à joüer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que comme vous n'aviés pas ma methode quand vous m'avés proposé le party de plusieurs joüeurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens differens sur ce sujet, je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procedez en la recherche de ce party.

Je recevray vôtre réponse avec respect & avec joye, quand méme vôtre sentiment me seroit contraire, je suis, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

Du 27. Octobre 1654.

MONSIEUR,

Vôtre derniere Lettre m'a parfaitement satisfait, j'admire vôtre methode pour les partys, d'autant mieux que je l'entens fort bien, elle est entierement vôtre, & n a rien de commun avec la mienne, & arrive au méme but facilement. Voilà nôtre intelligence rétablie, mais, Monsieur, si j'ay concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numeriques dont vous m'avez fait la grace de m'envoyer les enonciations, pour moy je vous confesse que cela mè passe de bien loin, je ne suis capable que de les admirer, & vous supplie tres-humblement d'occuper vôtre premier loisir à les achever, tous nos Messieurs les virent Samedy dernier & les estimerent de tout leur cœur : on ne peut pas aisement supporter l'attente de choses si belles & si souhaitables, pensés y donc, s'il vous plaît, & assûrez vous que je suis, &c.

Problemata proposita à D. de Fermat.

PRoponatur (si placet) *Wallisio*, & reliquis Angliæ Mathematicis, sequens quæstio numerica.

Invenire Cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat Quadratum. Exempli graria. Numerus 343. est Cubus, à latere 7. Omnes ipsius partes aliquotæ sunt 1, 7, 49; quæ adjunctæ ipsi 343. conficiunt numerum 400, qui est quadratus à latere 20.

Quæritur alius cubus numerus ejusdem naturæ.

Quæritur etiam numerus Quadratus qui additus omnibus suis partibus aliquotis conficiat numerum Cubum.

Has solutiones expectamus; quas si Anglia aut Galliæ Belgica & Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ *D. Digby* offeret & dicabit.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 20. Avril 1657.

MONSIEUR,

Puis que vous voulés, que les complimens cessent, soit fait. Il me suffit de vous asseurer une fois pour toutes, que vous vous estes tres-justement acquis un pouvoir absolu sur moy, & que je ne perdray point d'occasion à vous le témoigner. J'ay leu l'*Arithmetique Infinitorum* de M. Uvallis, & j'en estime beaucop l'Autheur. Et bien que la quadrature tant des paraboles, que des hyperboles infinies ait esté faite par moy depuis fort longues années, & que j'en aye autresfois entretenu l'illustre Toricelli, je ne laisse pas d'estimer l'invention de M. Uvallis, qui sans doûte n'a pas sçeu, que j'eusse preoccupé son travail. Voicy une de mes propositions aux termes que je la conceus en l'envoyant à Toricelli. Soient les deux droites S K R, & K O F. Et soient descrites les courbes E G H Q d'un côté, & D A B C de l'autre, en forme d'hyperboles, dont les asymptotes soient les droites premierement données. Soient encore tirées A G, B H, paralleles à S K R, & les droites B N, A M, G L, H I, paralleles à K O F. En l'hyperbole ordinaire le rectangle N P est égal au rectangle M A O. Mais supposons maintenant, que le produit du quarré B N & de la droite B P, soit égal au produit du quarré M A & de la droite A O. En ce cas la courbe sera une nouvelle hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera égal à l'espace compris soûs la base B H, & les deux courbes B A D F, F E G H qui vont à l'infini du côté F. Que si le produit du cube B N & de la droite B P, est égal au produit du cube A M & de la droite A O, en ce cas ce sera une autre hyperbole, dont la proprieté sera, que le parallelogramme B I sera double de l'espace compris sous la base B H & les deux courbes en montant, ut suprà. Et par regle generale, Si le produit d'une puissance de B N par une puissance de B P, est égal au produit d'une pareille puissance de M A par une pareille de A O, en supposant celles de B N & M A pareilles entre elles, comme aussi celles de B P & de A O aussi pareilles, le parallelogramme B I sera à la figure prolongée à l'infini, ut supra, comme la difference de l'exposant de la puissance de B N avec l'exposant de la puissance de B P est à l'exposant de la puissance de B P. De sorte qu'il suit de là, qu'en l'hyperbole ordinaire, l'espace de la figure prolongée à l'infini n'est point égal à un espace donné, parce que l'exposant des puissances étant le méme ne donne aucune difference. Et pour faire que l'espace de ladite figure prolongée à l'infini soit égal à un espace donné, il faut que l'exposant de B N soit plus grand que celuy de B P, comme il est aisé de remarquer. Tout cecy quoy qu'énoncé un peu diversement se peut tirer du livre de M. Uvallis. Mais il n'a pas fait une speculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doûte bien aise d'étre adverti, & qui peut passer pour un des miracles de la Geometrie. Je l'ay autrefois donné à Toricelli aussi bien que la precedente. C'est comme il arrive que quelquesfois l'espace prolongé à l'infini, comme B A D F E G H est aussi infini, comme en l'hyperbole ordinaire, & quelquesfois fini, comme en celles dont les exposants de BN surmontent ceux de B P. On demande, si lors que ledit espace prolongé à l'infini est égal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe & certaine. Or il arrive une chose merveilleuse en cette recherche, & laquelle j'ay découverte, & démonstrée, c'est que quelquesfois ledit espace quoy que fini n'a point de centre de gravité fixe, & quelquesfois il en a. Car par exemple, lors que le produit du quarré B N, & de la droite B P, est égal aux produits semblablement tirez, la figure B A D F E G H prolongée à l'infini qui en ce cas est égale

au parallelogramme B I, n'a pourtant aucun centre de gravité. Mais si le produit, par exemple, du cube B N & de la droite B P est égal aux produits semblables & semblablement tirez, en ce cas non seulement l'espace de la figure prolongée à l'infini, est égal à un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallelogramme B I, mais encore cette figure prolongée à l'infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne P F coupée en telle sorte au point O, que la ligne P O soit égale à la ligne K P. Et ce point O sera ledit centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini. Si Monsieur Uvallis veut avoir la demonstration de cette proposition & de la regle generale pour trouver lesdits centres de gravité, je vous l'envoyeray pour luy en faire part.

Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans sondit traitté, je n'en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se deduit par comparaison en Geometrie n'est pas toûjours veritable.

Je ne vous parle ny de vôtre livre, ny de celuy de Thomas Anglus, *ne sutor ultra crepidam*. Vous estés souverain en Physique, & je vous reconnois pour tel. J'espere pourtant au premier voyage de vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente naturelle, dequoy vous avés traitté dans vôtre Livre que Monsieur Borel m'a fait la faveur de me faire voir. Je suis, &c.

Problema propositum à D. de Fermat.

Quæstiones purè Arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata Geometricè potius quam Arithmeticè? Id sane innuunt pleraque & Veterum & Recentiorum volumina. Innuit & ipse Diophantus, qui licet à Geometria paulò magis quam cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit: Eam tamen partem Geometriâ non omnino vacare probant satis superque Zetetica Vietæa; in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur. Doctrinam itaque de numeris integris, tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium. Eam apud Euclidem leviter dumtaxat in elementis adumbratam, ab ijs autem qui secuti sunt, non satis excultam, (nisi forte in ijs Diophanti libris, quos injuria temporis abstulit, delitescat,) aut promovere studeant Α'ριθμητικῶν Παῖδες, aut renovare. Quibus ut præviam lucem præferamus, Theorema seu Problema sequens, aut demonstrandum aut construendum proponimus. Hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi, celebrioribus ex Geometria esse inferiores.

Dato quovis numero non-quadrato, dantur infiniti quadrati qui in datum numerum ducti, adscitâ unitate, conficiant quadratum. Exemplum. Datur 3. numerus non-quadratus; ille ductus in quadratum 1, adscitâ unitate, conficit 4, qui est quadratus. Item idem 3 ductus in quadratum 16, adscitâ unitate, facit 49, qui est quadratus. Et loco 1 & 16, possunt alii infiniti quadrati idem præstantes inveniri. Sed Canonem Generalem, Dato quovis numero non-quadrato, inquirimus. Quæratur, verbi gratia, quadratus, qui ductus in 149, aut 109, aut 433, &c. adscitâ unitate conficiat quadratum.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 20. Iuin 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu vôtre derniere lettre à la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de réponse. Vos deux lettres *Angloises* m'ont esté traduites par un jeune *Anglois*, qui est en cette ville, & qui n'a point connoissance de ces matieres ; de sorte que sa traduction s'est trouvée si peu intelligible, que je n'y ay peu decouvrir aucun sens reglé ; & ainsi je ne puis vous resoudre, si ce Mylord â satisfait à mes questions,ou non. Il me semble pourtant au travers de l'obscurité de cette traduction bourruë, que l'Autheur des lettres à trouvé mes questions un peu trop aisées ce qui me fait croire, qu'il ne les a pas resoluës. Et par ce qu'il pourroit equivoquer sur le sens de mes propositions, j'ay demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel adjoûté à toutes ses parties aliquotes fasse un nombre quarré J'ay donné par exemple 343, qui est cube, & aussi nombre entier, lequel adjoûté à toutes ses parties aliquotes fait 400, qui est un nombre quarré. Et par ce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui joint a toutes ses parties aliquotes fasse un nombre quarré ; Et si le Mylord Brouncker répond, qu'en entiers il n'y a que le seul nombre 343. qui satisfasse à la question, je vous promets, & à luy aussi, de le desabuser en luy en exhibant un autre. Je demandois encore un quarré en entiers, qui joint à toutes ses parties aliquotes fasse un cube. Pour la question proposée dans l'écrit Latin, que je vous envoyay, elle est aussi en nombres entiers. Et partant les resolutions en fractions (lesquelles peuvent étre d'abord fournies *à quolibet de trivio Arithmetico*) ne me satisferoient pas. Je suis, &c.

Lettre de M. de Fermat à Monsieur le Chevalier Kenelme Digby.

Du 15. Aoust 1657.

MONSIEUR,

J'ay receu avec joye & satisfaction vôtre dernier pacquet, & quand il ne contiendroit autre nouvelle, que celle de vôtre convalescence, & du retour de vôtre santé, c'est un bien si grand, & si considerable pour tous ceux qui aiment les belles lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaisir mediocre. J'ay receu la copie de la lettre de Monsieur Uvallis, que j'estime comme je dois, & j'advoüe, que ses figures sont les mémes que les miennes; & que ses conclusions pour leur quadrature sont aussi les mémes; mais sa façon de demonstrer, qui est fondée sur induction plûtôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimede, faira quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes demonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve, mais

toutes ses propositions pouvant être demonstrées *viâ ordinariâ, legitimâ & Archimedaa* en beaucoup moins de paroles, que n'en contient son livre, je ne sçay pas, pourquoy il a preferé cette maniere par notes Algebriques à l'ancienne, qui est & plus convainquante, & plus elegante, ainsi que j'espere luy faire voir à mon premier loisir. Je voudrois qu'ensuite il eût determiné les centres de gravité de ces hyperboles infinies en distinguant celles qui en ont, d'avec celles qui n'en ont pas : car tandis qu'il dira, que la chose luy est connüe,& qu'il n'en a pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas; Et d'autant plus, que la proposition generale sans demonstration me suffira de sa part; Et je vous réponds à l'advance, qu'elle ne sçauroit contenit plus de huit, ou dix lignes. Dés qu'il me l'aura envoyée, je luy fairay part de ma speculation sur ce sujet, & de ma façon de demonstrer.

Pour les questions des nombres, j'ose vous dire avec respect & sans rien rabatre de la haute opinion que j'ay de vôtre Nation, que les deux lettres de Mylord Brounker, quoy qu'obscures à mon égard & mal traduites, n'en contiennent aucune solution. Ce n'est pas que je pretende par là renouveller les joûtes & les anciens coups de lances, que les Anglois ont autrefois fait contre les François. Mais sans sortir de la Metaphore, j'ose vous soustenir,& à vous, Monsieur, plus justement qu'à tout autre, qui excellez aux deux mestiers, que le hazard, & le bon-heur se mélent quelquefois aux combats de science aussi bien qu'aux autres, & qu'en tout cas nous pouvons dire, que *non omnis fert omnia tellus*. Je seray pourtant ravy d'être détrompé par cét ingenieux & sçavant Seigneur, & pour luy témoigner, que nôtre combat ne sera point à outrance, je me relâche dans la question suivante, que je m'en vay luy proposer, de la rigueur de mes premieres questions, qui ne vouloient que des nombres entiers : il me suffira, qu'ils soient rationaux à la mode de Diophante. Le nom de cét Autheur me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse, qu'il vous a pleu me faire de recouvrer quelque manuscrit de cét Autheur, qui contienne tous les treize livres, & de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main. Voicy la nouvelle question ou pour Mylord Brounker, ou pour Monsieur Uvallis, que j'écris en Latin suivant vôtre ordre.

Datum numerum ex duobus numeris cubis compositum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propositionem in quadratis tantùm exequutus est Diophantus. In cubis ne tentavit quidem, in ijs saltem libris, qui ad nos de majore ipsius opere pervenerunt.

Exempli gratiâ, proponatur numerus 28. ex duobus Cubis 1. & 27. compositus, oportet dictum numerum 28. in duos alios Cubos rationales dividere, & propositionis solutionem generaliter præstare.

Je consens, que Monsieur Frenicle l'entreprenne, je suis persuadé, qu'il ne la trouvera pas si aisée, que les autres, que je sçavois être de sa jurisdiction. Je l'estime extraordinairement aussi bien que vous, mais pourtant ce que je m'en vay adjoûter, l'estonnera, si vous prenés la peine de le luy communiquer. Je luy avois écrit, qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers, qui joint au binaire fasse un cube, & que ledit quarré est 25. auquel si vous adjoûtés 2. il se fait 27. qui est cube. Il a peine à croire cette proposition negative, & la trouve trop hardie & trop generale. Mais pour augmenter son étonnement, je dis que si on cherche un quarré, qui adjoûté à 4. fasse un cube, il n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, sçavoir 4. & 121. car 4. adjoûté à 4. fait 8. qui est cube: & 121. adjoûté à 4. fait 125. qui est aussi cube : mais aprés cela toute l'infinité des nombres n'en sçauroit fournir un troisiéme, qui ait la méme proprieté.

Je ne sçay ce que diront vos Anglois de ces propositions negatives, & s'ils les trouveront trop hardies. J'attens leur resolution, & celle de Monsieur Frenicle, qui n'a point répondu à une longue lettre, que M. Borel luy rendit de ma part; dequoy je suis surpris, car je luy répondois exactement à tous ses doûtes, & luy faisois quelque question de mon chef, dont j'attends la solution. Je suis, &c.

J'oubliois

J'oubliois de vous dire, que Monſieur Borel a écrit à ſon pere que Monſieur l'Ambaſſadeur de Hollnnde s'étonnoit dequoy je n'avois pas répondu à M. Schooten qu'il pretend avoir reſolu mes queſtions, & m'en avoir propoſé d'autres. Mais je vous aſſeure, que je n'ay rien veu de ſa part, & que ſi vous m'en envoyés copie, j'y répondray.

J'ay mis la propoſition un peu plus generale dans la page ſuivante où elle me ſemble étre mieux. On la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers, en ces termes.

Trouver deux nombres cubes, dont la ſomme ſoit cube: & trouver deux nombres cubes, dont la ſomme ſoit égale à deux autres nombres cubes.

Propoſuit Diophantus datum numerum quadratum in duos quadratos dividere.

Item. Datum numerum ex duobus quadratis compoſitum in duos alios quadratos dividere.

Quæſtionem autem ad cubos evehere, nec ipſe, nec Vieta tentavit.

Quidni igitur famoſam propoſitionem, & recentioribus reſervatam Analyſtis, expedire aut dubitemus, aut differamus?

Proponatur itaque, datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere.

Item. Datum numerum ex duobus cubis compoſitum in duos alios cubos rationales dividere.

*Remarques * de M. de Fermat ſur l'Arithmetique des Infinis de Monſieur Wallis Profeſſeur de Geometrie en Angleterre dans l'Univerſité d'Oxford.*

1. EN ſon Epître il declare comment il s'eſt mis à la recherche de la Quadrature du Cercle, & dit que quelques veritez qui ont eſté deſcouvertes en Geometrie, luy ont donné l'eſperance, qu'elle ſe pourroit trouver. Ces veritez ſont,

Que la raiſon des cercles infinis du Cone aux infinis du Cylindre eſt connuë, ſçavoir celle du Cone au Cylindre qui a méme baſe & hauteur: & pareillement la raiſon des diametres deſdits Cercles, ſçavoir celle du Triangle qui paſſe par l'Axe du Cone, au parallelogramme, qui paſſe par l'Axe du Cylindre.

Comme auſſi on a la raiſon du Conoïde parabolique au Cylindre circonſcrit, & celle de la parabole au parallelogramme, qui paſſent par leurs Axes, qui ſont comme l'aſſemblage des Diametres des Cercles infinis, qui compoſent leſdits ſolides.

De plus, qu'on a auſſi trouvé la raiſon des ordonnées tant au Triangle, qu'au Conoïde parabolique, ou parabole, qui ſont les Diametres deſdits Cercles.

D'où il conclud, que puis qu'on a trouvé auſſi la raiſon de la Sphere au Cylindre circonſcrit, ou celle de l'infinité des Cercles paralleles, dont on peut concevoir que la Sphere eſt compoſée, à pareille multitude de ceux qui ſe peuvent feindre au Cylindre; on pourra auſſi eſperer de pouvoir découvrir la raiſon des ordonnées en la Sphere, ou au Cercle, à celle du Cylindre, ou Quarré, ſçavoir la raiſon des Diametres des Cercles infinis, qui compoſent la Sphere, aux Diametres des Cercles du Cylindre; ce qui ſeroit avoir la quadrature du Cercle.

Mais de méme qu'on ne pourroit pas avoir la raiſon de tous les Diametres pris enſemble des Cercles, qui compoſent le Cone, à ceux du Cylindre circonſcrit, ſi on n'avoit la Quadrature du Triangle non plus que la raiſon des Diametres des Cercles qui compoſent le Conoïde parabolique, à ceux qui ſont le Cylindre circonſcrit, ſi on n'avoit la Quadrature de la Parabole. Ainſi on ne pourra pas connoître la raiſon des Diametres de tous les Cercles, qui compoſent la Sphere, à ceux des Cercles, qui compo-

*Les Problemes cy-devant imprimés page 188. & 190. envoyez par M. de Fermat à M. le Chevalier Digby avec ces Remarques, ont eſté le ſujet d'un Livre de M. Uvallis celebre Profeſſeur de Geometrie dans l'Univerſité d'Oxford: le titre de ce Livre imprimé en Angleterre en 1658. eſt. Commercium Epiſtolicum, inter D. Vicecomitem Brouncker Anglum; D. Kenelmum Digby; D. Fermatium Senatorem Toloſanum; D. Freniclum Nobilem Pariſinum, cum D. Joh. Uvallis Geomet. Profeſſ. Oxonij; D. Franc. à Schooten, Math. Prof. Lugduni Batavorum; Aliiſque.

ſent le Cylindre circonſcrit ; ſi on n'a pas la Quadrature du Cercle. Car de demander la raiſon, qu'il y a entre les Diametres de tous les Cercles Paralleles, qu'on peut concevoir en la Sphere (leſquels Diametres pris tous enſemble, ne ſont autre choſe, qu'un Cercle) & ceux des Cercles, qu'on peut feindre au Cylindre circonſcrit (leſquels ſont un quarré circonſcrit audit Cercle) cela n'eſt autre choſe, que de demander la raiſon du Cercle au quarré circonſcrit.

2. En la méme Epitre aprés avoir poſé une ſuite de nombres, ſçavoir 1. 6. 30. 140. 630. il demande le terme moyen, qui doit étre mis entre 1. & 6. Je reſponds, que ſi on a égard à la ſuite entiere deſdits nombres, on ne peut poſer aucun terme moyen entre leſdits 1. & 6. pource qu'en cette ſuite les nombres ne ſont pas une proportion continuë ; mais en autant de façons, que l'un eſt comparé à l'autre, autant ſont ils de proportions differentes, de ſorte que ce ſont pluſieurs proportions, ou progreſſions diſjointes, & ainſi quand on prendroit un terme moyen entre 1. & 6. il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou ſuite, qu'on peut remarquer en ces nombres, conſiſte au raport qu'ont entr'eux les nombres, dont ils proviennent par multiplication, auſquels on voit une eſpece de progreſſion Arithmetique ; neantmoins ne ſçauroit paſſer aux nombres ſuſd[i]ts, en telle ſorte que par iceluy on puiſſe donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correſpondance à toute la ſuite : au contraire la proprieté méme de cette progreſſion fait, qu'il n'y en peut avoir. Voicy comment.

Les nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. ſont produits par les ſuivans en multipliant, 1. $4.\frac{2}{1.}$ $4.\frac{2}{2.}$ $4.\frac{2}{3.}$ $4.\frac{2}{4.}$ ou les equivalens 1. $\frac{6}{1.}\ \frac{10}{2.}\ \frac{14}{3.}\ \frac{18}{4.}$

En ces nombres, qui ſervent à faire les donnés, il eſt facile à voir où eſt le raport: Il conſiſte aux premiers, en la ſeule augmentation du denominateur de la fraction, qui y eſt jointe, ce qui fait diminüer les nombres d'autant plus, qu'ils s'éloignent du premier terme, ſçavoir de 1. & aux 2[mes]. 1. $\frac{6}{1.}\ \frac{10}{2.}$ &c. (qui ſont les mémes en autres termes) les numerateurs des fractions augmentent de 4. & les denominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminüer les nombres, tant plus la progreſſion avance ; en ſorte que celuy qui eſt le plus proche du premier terme 1. ſçavoir 4. $\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ qui vaut 6. eſt le plus grand de tous.

Il faut auſſi remarquer, que le raport des nombres de ladite progreſſion n'arrive pas juſques au premier terme 1. ou plûtôt ne commence pas dés le premier terme, mais au ſecond ſeulement, qui eſt ſa borne ; De ſorte que ſi on vouloit augmenter les termes de ladite progreſſion, en la changeant & mettant un nombre moyen entre le premier & le ſecond terme, ſçavoir entre 1. & 4. $\frac{2}{1.}$ ou $\frac{6}{1}$ il ne faudroit pas avoir égard à 1. mais aux autres nombres $4.\frac{2}{1}$ $4.\frac{2}{2}$ $4.\frac{2}{3}$ $4.\frac{2}{4.}$ ou à ces autres qui ſont les mémes $\frac{6}{1}\ \frac{10}{2}\ \frac{14}{3}\ \frac{18}{4.}$ car cette progreſſion n'auroit pas de ſuite, ſi on la commençoit par 1.

Puis donc qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1. qui n'a rien de commun avec les nombres de ladite progreſſion ; mais aux autres ſeulement, & qu'ils augmentent à meſure, qu'ils approchent du premier terme 1. il s'enſuit, que le nombre, qu'on prendroit entre 1. & 4. $\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$ ſeroit plus grand, que ledit $\frac{6}{1.}$ ou 6. & il faudroit multiplier le premier terme 1. par ce nombre moyen, qui ſeroit plus grand que 6. pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premierement donnez, qui ſont 1. & 6. (car leſdits nombres donnez 1. 6. 30. 140. 630. n'ont point d'autre raport ou liaiſon, que celle, qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune) & ainſi on auroit un nombre plus grand que 6. pour le moyen terme d'entre 1. & 6. ce qui eſt abſurde.

De là s'enſuit, qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1. & 6. en tant qu'ils ſont

compris en la ſuite ou progreſſion des nombres 1. 6. 30. 140. 630.

On peut inferer de là, que la ligne courbe V C, n'eſt point égale en elle méme, & qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu, qui ſoit égal ou reglé; mais de pluſieurs differens, ſuivant ſes parties; & que c'eſt une ligne composée de proportions de pluſieurs courbes compriſes entre les paralleles à l'axe V X de la figure: car en icelle il eſt bien neceſſaire, que la moyenne ligne tirée entre la premiere & la ſeconde paralleles, ſçavoir entre 1. & 6. ſoit moindre que 6. mais outre que cette moyenne ligne ſeroit de differente longueur ſuivant la nature & la proprieté de cette portion de la courbe V C, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a eſté dit; elle n'auroit raport qu'avec les 2. termes, 1. 6. & non pas avec les autres, n'y avec les moyennes, qu'on auroit tirées entre-deux, ſi on prenoit le tout conjointement.

3. En la premiere propoſition ledit ſieur Uvallis propoſe une ſuite de quantités commenceans par *o*, (qui repreſente le point) & qui ſe ſuivent en progreſſion Arithmetique; & cherche quelle raiſon il y a entre la ſomme deſdites quantitez, & la ſomme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raiſon, eſt de prendre les ſommes de diverſes quantitez de nombres commenceans par les moindres; puis comparer les raiſons les unes aux autres, & inferer de la une propoſition univerſelle.

On ſe pouvoit ſervir de cette methode, ſi la demonſtration de ce qui eſt propoſé étoit bien cachée; & qu'auparavant de s'engager à la chercher on ſe voulut aſſeurer à peu prés de la verité: mais il ne s'y faut fier que de bonne ſorte, & on y doit apporter les precautions neceſſaires; car on pourroit propoſer telle choſe & prendre telle regle pour la trouver, qu'elle ſeroit bonne à pluſieurs particuliers, & neantmoins ſeroit fauſſe en effect, & non univerſelle; de ſorte qu'il faut étre fort circonſpect pour s'en ſervir; quoy qu'en y apportant la diligence requiſe elle puiſſe étre fort utile, mais non pas pour prendre pour fondement de quelque ſcience, ce qu'on en aura deduit; comme fait le ſieur Uvallis; car pour cela on ne ſe doit contenter de rien moins, que d'une demonſtration, & principalement au ſujet de la propoſition, dont il s'agit; dont la ſolution & demonſtration eſt fort facile.

Voicy comme on demonſtrera que leſdites quantitez propoſées, étans jointes enſemble, ſont la moitié d'autant de quantitez égales à la plus grande d'icelles.

Soient expoſées des quantités ou nombres, qui commencent par le point, ou par *o*, & qui ſe ſuivent en progreſſion Arithmetique, & ſoient celles de la premiere ligne.

1. *o. a. b. c. d.* Quantités données.
2. *d. d. d. d. d.* Quantités égales à la plus grande des données.
3. *d. c. b. a, o.* Excés des plus grandes par deſſus les données.

Puiſque les quantités données ſont en progreſſion Arithmetique, le troiſiéme terme *b*, ſurpaſſera le ſecond de pareille quantité, que le ſecond (ſçavoir *a*) ſurpaſſe le premier qui eſt *o*; mais l'excés de *a* par deſſus *o* eſt *a*; & partant toutes ces quantités ſe ſurpaſſeront l'une l'autre de proche en proche, ſelon la quantité du ſecond terme *a*. Et ſi on prend les quantités de 2. en 2. laiſſant une d'icelles entre-deux, comme ſont *a, c*, ou *b, d*, de la premiere ligne; leur difference ſera le troiſiéme terme, comme il eſt evident: & de méme ſi on les prenoit de 3. en 3. elles auroient le quatriéme terme *c*, pour leur difference.

De là il s'enſuit, que ſi on prend autant de termes égaux au plus grand terme *d*, des quantités données, comme en la ſeconde ligne; leur excés pardeſſus les quantitez données ſera égal auſdites quantités données; comme on voit en la troiſiéme ligne. Car l'excez de *d*, par deſſus la plus grande des quantitez données, ſçavoir par deſſus *d*, eſt *o*, qui eſt le premier terme des quantitez données; l'excez du méme *d*, pardeſſus le terme precedent *c*, eſt le ſecond terme *a*, comme il a eſté monſtré; ſçavoir pource que les 2. quantitez *c* & *d*, ſont prochaines: & enſuite l'excez du *d*, par deſſus *b*, ſera *b*, & ainſi des

autres; jusques à ce, qu'enfin étant au premier terme *o*, l'excez de *d*, par dessus iceluy sera le méme *d*: & ainsi la ligne des excez, qui est la troisiéme, sera égale à la premiere qui contient les quantitez données. Mais la premiere & la troisiéme ligne étant jointes ensemble; sçavoir les quantitez données, étant jointes aux excez des quantitez de la seconde ligne par dessus celles de la premiere, qui sont les données, font ladite seconde ligne, qui a chacun de ses termes égal au plus grand de ceux de la premiere, partant la seconde ligne, ou le plus grand terme des données, pris autant de fois qu'il y a de termes, sera double de la premiere ligne, c'est à dire des quantitez données. Ce qu'il falloit demonstrer.

4. En la seconde proposition il requiert, que le premier terme soit *o*, & le second 1. autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela je dis, que si on commence par *o*, quelque nombre qu'on mette pour le second terme, la somme d'autant de fois le plus grand terme sera toûjours double des quantitez données; car si pour *a*, *b*, *c*, *d*; on prend quelques nombres, qu'on voudra, qui soient en progression Arithmetique depuis le premier terme *o*, cela succedera toûjours en la méme sorte, ainsi qu'il a esté cy-devant demonstré.

Lettre de Monsieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 5. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Je me donnay l'honneur de vous écrire le 19. du mois passé, depuis ce temps là j'ay esté en Normandie, & à mon retour j'ay trouvé la Lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire du 17. du méme mois, dont je vous rends tres-humbles graces, & m'estime tres-heureux de vous servir dans le commerce qui est entre vous & Monsieur de Frenicle, à qui je monstray aussi vôtre Lettre, & comme vous y parlez de nôtre Chancellier Bacon, cela me fit souvenir d'un autre beau mot qu'il dit en ma presence une fois à feu Monsieur le Duc de Bouquingam. C'étoit au commencement de ses malheurs, quand l'Assemblée des Estats, que nous appellons le Parlement, entreprit de le ruiner, ce qu'elle fit en suite: ce jour là il en eût la premiere alarme. J'étois avec le Duc ayant disné avec luy, le Chancelier survint, & l'entretint de l'accusation qu'un de ceux de la Chambre Basse avoit presentée contre luy, & il supplia le Duc d'employer son credit auprés du Roy pour le maintenir toûjours dans son esprit: le Duc luy répondit qu'il étoit si bien avec le Roy leur Maître qu'il n'étoit pas besoin de luy rendre de bons offices auprés de Sa Majesté; ce qu'il disoit, non pas pour le refuser, car il l'aymoit beaucoup, mais pour luy faire plus d'honneur; le Chancelier luy répondit de tres-bonne grace, qu'en effet il croyoit étre parfaitement bien dans l'esprit de son Maître, mais aussi qu'il avoit toûjours remarqué que pour si grand que soit un feu, & pour si fortement qu'il brûle de luy méme, il ne laissera pourtant pas de brûler mieux & d'étre plus beau & plus clair si on le souffle comme il faut; de méme j'ay dit à Monsieur Frenicle que pour si grand feu d'esprit qu'il ait, & quelque merveilleux que soit son genie pour la science des nombres, son feu seroit plus brillant s'il le vouloit exciter ou augmenter par l'estude, par la lecture des Anciens & par la conversation. Il vous honnore infiniment, & dit que jamais homme n'a approché de vôtre fond de science, il m'a apporté ce matin un écrit pour vous l'envoyer, je l'ay fait copier par mon Secretaire, car vous ne l'auriés peu lire, il écrit d'ordinaire sur de lambeaux de papier, & si vîte

qu'il n'y a que luy méme qui puiſſe lire ſon écriture. Vous aurés veu par ma derniere Lettre que j'ay receu celle que vous me fites l'honneur de m'écrire lors que vous eſtiés à la campagne. Au lieu de vous laiſſer paſſer le titre de pareſſeux que vous vous donnez injuſtement, j'admire infiniment la facilité & la preſence avec laquelle au milieu de vos grandes occupations vous exprimez ſur le champ vos profondes & ſubtiles penſées. Je vous ſupplie de croire que j'honnore vos rares talens, & que je voudrois que mes actions vous peuſſent témoigner mieux que mes paroles à quel point je ſuis, &c.

Lettre de Monſieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 12. Decembre 1657.

MONSIEUR,

Depuis que je me ſuis donné l'honneur de vous écrire une Lettre du 5. de ce mois, je receus celle que vous m'avés fait la faveur de m'écrire du 25. du paſſé, dont je vous rends tres-humbles graces ; elle me fut renduë comme j'étois à table avec Monſieur Frenicle à qui je la montray, & y ayant papier & ancre ſur le buffet, je le priay de vous écrire quelque petit mot ſur ce que vous y diſiés ſur ſon ſujet, je vous envoye ſon écrit : il me fait ſouvenir fort ſouvent d'un Aumônier qu'avoit le feu Roy d'Angleterre, qui étoit un des plus Eloquens Predicateurs de ſon temps, & tres-ſubtil Theologien : mais depuis que la guerre fut commencée il n'y avoit plus moyen de le faire prêcher ou parler de ſa ſcience, il n'avoit d'autres idées en ſon imagination que de machines de guerre & des ſtratagemes pour prendre des Villes, en quoy il n'entendoit rien du tout : ainſi Monſieur Frenicle ne me veut entretenir d'autre choſe que de la Theologie Myſtique & de ſes penſées ſur le Franc-arbitre, ou ſur la predeſtination, quittant le rang qu'il pourroit poſſeder d'un des plus grands Mathematiciens du ſiecle pour un des moindres Theologiens : car c'eſt bien tard de commencer la Phyſique & la Theologie aprés l'âge de cinquante ans, je dis la Phyſique, parce qu'il eſt mal-aiſé d'être un grand Theologien ſi on n'eſt un ſolide Phyſicien, & ſi on n'a une veritable connoiſſance de la nature dont le ſommet ſert de baſe à la grace. Mais je dois bien prendre garde de m'engager en ce que j'entens auſſi peu & encore moins que luy, je reviens à ce que je ſçay de ſcience certaine, dont je vous feray demonſtration evidente toutes les fois que l'occaſion s'en preſentera, & c'eſt que je ſuis, &c.

Lettre de Monſieur le Chevalier Digby à M. de Fermat.

Du 13. Fevrier 1658.

MONSIEUR,

Je ſuis ſur le point d'entrer en carroſſe pour aller à Roüen, dont je ne croy pas revenir de 15. jours ou trois ſemaines, c'eſt pourquoy dés que j'eus receu vôtre pacquet du 27. du paſſé j'allay chez Monſieur Clerſelier, & n'y ayant pas moyen de luy faire faire des copies de vos écrits avant mon départ, je creus que vous trouveriez bon que je les luy confiaſſe ſur la parole qu'il me donna de vous les rendre fidelement dés qu'il auroit tiré copie de ce qu'il luy faut : c'eſt un fort honnéte homme,

& fort vôtre serviteur, il m'a dit qu'il se donneroit l'honneur de vous écrire, par cét Ordinaire. Au reste, Monsieur, quand bien je demeurerois icy je ne serois pas assez vain pour accepter la charge que vous voudriez m'imposer, elle est trop pesante pour ma foiblesse, je sçay trop bien, *quid ferre recusent*, *quid valeant humeri*, pour pouvoir étre Arbitre entre deux Grands Personnages il faut aller du pair avec eux; Crassus s'aquitta bien mal de cette fonction entre Cæsar & Pompée, n'ayant pas les reins aussi forts qu'eux. Il est vray que ceux qui sont dans les valées peuvent discerner la hauteur des plus grandes montagnes pour en avoir de l'admiration. Mais pour bien juger de ce qu'il y a au sommet de quelqu'une d'elles il faut étre monté aussi haut sur une autre. Vous me permettrez donc de vous dire avec le grossier Palæmon, *non nostrum inter vos tantas componere lites*, Et pour ce qui est de la chaleur avec laquelle vous, Monsieur,& Monsieur Descartes avés soûtenu vos sentimens, je ne serois pas d'avis d'en rien oster ou changer, pourveu qu'il n'y ait rien qui soit offenceant, ce qu'on ne peut presumer de deux aussi grands hommes, & à quoy Monsieur Clerselier prendra garde. Car de vouloir étouffer ce petit feu brillant & étincelant, ce seroit ôter beaucoup de la grace & de la force à une contestation d'esprit & de science, & c'est une des raisons pourquoy les disputes aux Universitez des Suisses sont si peu agreables, leur maniere d'argumenter étant bien éloignée de la vivacité des Bacheliers de la Sorbonne qui pressent avec vehemence & avec chaleur; car cette chaleur provient d'un feu qui ne brûle pas, mais qui semble donner la lumiere & la vie comme celle du Soleil. Je ne sçaurois m'empécher de vous envoyer quelques Vers que le plus grand genie de nôtre Isle pour les Muses écrivit au Chancelier Bacon, qui étoit son grand amy, & que vous témoignez étre fort le vôtre en le citant souvent. Je vous diray comment je les ay rappellez en ma memoire: l'autre jour m'entretenant avec une personne de grand merite de vos rares qualitez, je luy recitay ces vers y mettant vôtre nom au lieu de celuy de Baco, il en voulut avoir une copie, je la luy fis transcrire par mon Secretaire sur le broüillard que j'en fis à la hâte, il vous en auroit fait aussi une copie s'il eût esté chez moy, mais je viens de l'envoyer chez Monsieur l'Ambassadeur d'Angleterre. Je suis, &c.

Lettera del Signor Digby al Signor Di Fermat.

Di 15. Maggio 1658

ILL.MO SIG. PADRON COL.MO

Haurei temuto d'infastidire troppo V. S. Illustrissima con nuova lettera, se la sua ultima delli 4. del corrente, non m'havesse recata cagione (quantunque in soggetto di poco rilievo) di renderle qualche picciola servitù ò più presto ossequio e conformità alli suoi commandi; Havendo imparato dal savio, che come c'è tempo di parlare, vi lo è anche del silentio; & dallo spiritoso Poëta Thosco, che

Il silentio ancor suole
Haver prieghi e parole.

Ma lei havendomi fatto l'honore d'ordinarmi di mandarle un de' miei libri della Physica in Inglese, non l'ho voluto lasciar andare senza accompagnamento di queste poche righe, per ringratiarla della sua tanta compiacenza in dire che ha intento di trascorrerlo, per auvezzarsi cosi alla nostra rozza favella; rozza in quant'al suono, & ingrata all' orechia non auvezza a essa; ma forse, quanto alla copia, proprietà, & energia dell'espressioni, & all'eleganza e politezza in ogni altro genero, che non cede punto alle più eleganti e stimate, ne delle volgari, ne delle dotte, che habbino mai ha-

vuto prattica nel mondo, e che nelle poësie che habbiamo, non solo va del pari, ma auvanza di gran lunga li migliori ò Toscani, ò Latini, ò Greci; eccettuando però nell'Heroica Homero & Virgilio, i quali doi, senza contrasto, son fuori d'ogni comparatione con tutti de i secoli dopo loro, e però, prudentemente fece quel Grammatico ardito Giuglio Scaligero (che maggior epitheto non gli posso conceder io, quantunque i pedanti moderni gl' affigghino il titolo invidioso di divino Critico) che in vece di far censura dell' ultimo e forse il minore di essi, gl' eresse un altare. Onde veramente alle volte lamento la sorte che ci ha fatti,

Penitus toto divisos orbe Britannos.

Poiche habbiamo parecchie compositioni Poëtiche lequali meritarebbono la luce & il godimento universale, e per lequali capire, ho conosciuto 4. persone di spiriti sublimi & ingegnosissimi (doi Francesi, e doi Italiani) che per haver visto delle grossieri interpretationi in prosa di certi carmi Inglesi, si sono applicati con fervore a studiare nostra lingua, per bever alla schietta fonte delle nostre acque, le quali hanno poi confessato haver gli più sedato la loro sete in simile materia, che qualsivoglia abondante fiume di altra regione in terra ferma. Per conformarmi dunque al voler di V. S. J. ho messo in mano del Messaggiero di Tolosa Lunedi passato un involto contenendo il mio detto libro, del quale veramente non ne haveva piu copia apresso di me, havendo per cio scritto in Inghilterra, doue è stato ristampato questo trattato tre ò quattro volte in ambedue le Università di Oxonio e Cantabrigia: e poi che lei si uvole penare di dar un' occhiata à questo mio componimento, mi rallegro molto che cio sia nella lingua nella quale io l'ho conceputo: Per esser che quantunque il tradottore sia stato huomo dottissimo, e la sua traduttione essaminata per tutto il Collegio de i Dottori Inglesi di questa Città tutti valenti Theologii quali la fecero fare per servir allo studio di tutti i loro seminarij, nientedimeno, egli è cosa certa, che ci è gran differenza tra l'original & il transcritto, inquanto al vigor dell'espressione, e credo che dopo haver vissuto sempre in nostra corte polita, e conversato continüamente co'l Bacono, il Seldeno e altri maggiori lumi della nostra Patria, non si stimarebbe vanità in me s'io mi attribuisse lo scriver correttamente in Inglese. E quando io feci il primo disegno di questo dicorso, godevo di tranquillità assai per spiegar con maggior chiarezza cio che voleva dire, essendo che lo feci nello spatio di quelli quasi doi anni ch 'io fui continüamente su'l mare: durante il quale, è ben vero che quasi ogni giorno hebbi occasione di prepararmi a combattere con la mia flotta (essendo nel mar mediterraneo circondata dalle forze Francesi e Spagnuole, con chi hauevamo allora guerra, e anche dalle Veneziane) nientedimeno mi avuanzava tanto tempo, che se non fosse stato che per evitar il tedio (ancorche il comando del Rè fù il mio primo motivo) mi accingevo ogni giorno con premura a metter qualche cosa in carta, dimodo che posso con ragione dire come quel più dotto & gentil cavagliero di tutta la nation Castigliana, e Prencipe de'loro Poëti Garcilasso de la Vega,

Entre las armas del sangriento Marte
Hurtè del tiempo esta breve suma,
Tomando hora la spada, hora la pluma.

Ma poi che lei si degna voler veder de i meschini parti del mio sterile ingegno, ho volsuto farle parte ancora d'un altro trattaticivolo che ho composto intorno all'infallibilità della Religione Catholica per dar sodisfatione a un' de' maggiori genij ch'io habbia mai conosciuto, e che finalmente l'ha convinto. Perche lui non si contentava di considerar Iddio come un Legislatore, che volesse dimonstrare il suo potere con dar premij ò pene secondo una volontà imperiosa senza motivo ragionevole fondato in natura, e però bisognò penetrar nella Filosofia della Religione, e perche essa sia necessaria a gl'huomini. In una parola, bisognò combattere in lui tutte le maggiori forze de' più dotti Sociniani (la più terribil' setta d'Heretici che sia mai stata) nel che

Bb 4

fare ho qui impiegato tutto'l vigore del mio debbole ingegno in una strada non calcata d'altri, & tutte le piu squisite espressioni che sò della lingua nostra, & non ne feci stampare se non 30. copie per dar ad amici confidenti. Gli mando ancora un altro trattato Inglese, che ha fatto gran romore in Inghilterra & che molti vogliono attribuire a me, ancor che sia sotto il nome del Signor Bianchi (conosciuto sotto titolo di Thomas Anglus) per esser che i sentimenti dell'Autor & li miei siano precisamente gl'istessi. Dimando perdono de'l mio tanto importunarla, & la riverisco, &c.

Lettre de Monsieur Pascal à M. de Fermat.

De Bienassis le 10. Aoust 1660.

MONSIEUR,

Vous étes le plus galand homme du monde, & je suis assurement un de ceux qui sçay le mieux reconnoître ces qualitez là & les admirer infiniment, sur tout quand elles sont jointes aux talens qui se trouvent singulierement en vous; tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoissance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aye encore d'écrire & de lire moy méme: mais l'honneur que vous me faites m'est si cher que je ne puis trop me hâter d'y répondre. Je vous diray donc, Monsieur, que si j'étois en santé je serois volé à Tolose, & que je n'aurois pas souffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moy. Je vous diray aussi que quoy que vous soyez celuy de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand Geometre, ce ne seroit pas cette qualité là qui m'auroit attiré. Mais que je me figure tant d'esprit & d'honéteté en vôtre conversation que c'est pour cela que je vous rechercherois. Car pour vous parler franchement de la Geometrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit, mais en méme temps je la connois pour si inutile que je fais peu de difference entre un homme qui n'est que Geometre,& un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde,mais enfin ce n'est qu'un métier;& j'ay dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essay,mais non pas l'employ de nôtre force: de sorte que je ne ferois pas deux pas pour la Geometrie, & je m'assure que vous étes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant cecy de plus en moy que je suis dans des études si éloignées de cét esprit là, qu'à peine me souviens je qu'il y en ayt. Je m'y étois mis il y a un an ou deux par une raison tout a fait singuliere, à laquelle ayant satisfait je suis en hazard de n'y plus penser jamais, outre que ma santé n'est pas encore assez forte, car je suis si foible que je ne puis marcher sans baston, ny me tenir à cheval. Je ne puis méme faire que trois ou quatre lieües au plus en carrosse, c'est ainsi que je suis venu de Paris icy en vingt-deux jours: les Medecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de Septembre, & je suis engagé autant que je puis l'étre depuis deux mois d'aller de là en Poitou par eau jusqu'à Saumur pour demeurer jusqu'à Noël avec Monsieur le Duc de Roanes Gouverneur de Poitou, qui a pour moy des sentimens que je ne vaus pas. Mais comme je passeray par Orleans en allant a Saumur par la riviere, si ma santé ne me permet pas de passer outre, j'iray de là à Paris; Voilà, Monsieur, tout l'état de ma vie presente, dont je suis obligé de vous rendre compte, pour vous assurer de l'impossibilité où je suis de recevoir l'honneur que vous daignez m offrir, & que je souhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître ou en vous ou en Messieurs vos enfans, ausquels je suis tout devoüé, ayant une veneration particuliere pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde. Je suis, &c.

Clarissimo

*VIRO CLARISSIMO DOM. GASSENDO**

Petrus de Fermat. *S. P.*

De proportione quâ gravia decidentia accelerantur.

PRonuntiavit Galileus motum uniformiter acceleratum esse cum, qui à quiete recedens temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit.

Eum verò qui æqualibus spatijs æqualia celeritatis momenta sibi superaddit, adeo non convenire motui gravium descendentium affirmat, ut ex eo supposito motum in instanti fieri deducat, & ut sibi persuasit, facillimè demonstret.

Sed concedatur, si placet, viro perspicaci & Lynceo indemonstrata conclusio dummodò sit vera. Demonstrationem enim dum primo statim obtutu,

Aut videt, aut vidisse putat per nubila.,

Nihil mirum si lectoribus minus utique Lynceis parum videatur satisfecisse.

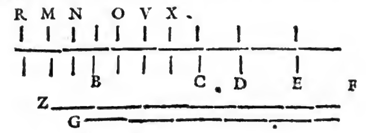
Ut igitur constet suus honor Galileo, neque ampliùs de ipsius illatione ambigatur, aut rationibus tantum probabilibus disputetur, propositionem ipsam more Archimedæo hîc demonstratam habebis.

Si quotlibet rectæ ad unum punctum concurrentes exponantur in continua proportione, earum intervalla erunt in eadem ratione, verbi gratiâ,



Sint rectæ A F, B F, C F, D F, E F, &c. in continua proportione, erunt intervalla ipsarum A B, B C, C D, D E in eadem ratione. Est enim ut tota A F ad totam B F ita ablata B F, à priore ad C F ablatam à posteriore. Ergo ita reliqua A B ad reliquam B C, ut tota ad totam, hoc est, ut A F ad B F, & sic de cæteris. Eâdem ratione demonstrabimus ut A F, ad C F, ita esse A B ad C D, & ut B F, ad D F, ita esse B C, ad D E, &c.

Si intelligatur motus à puncto F versus punctum A continuè acceleratus secundum rationem decursorum spatiorum & exponantur quotlibet continuè proportionales ut A F, B F, E F, &c. tempus in quo mobile percurret spatium D E, erit æquale tempori, in quo idem mobile percurret spatium D C, denique spatia omnia E D, D C, C B, eodem tempore singula percurrentur,



Demonstrabimus primò spatia C B, B A, eodem tempore in supposito motu percurri.

Si enim tempus per A B, non est æquale tempori per B C, erit vel majus, vel minus. Sit primum majus si fieri potest. Ergo tempus per A B, est ad tempus per B C, ut aliqua recta major ipsa B F, ad ipsam B F: sit recta illa Z. Ergo est ut tempus per A B, ad

* Hæc epistola Typis edita fuit tomo 6. operum Gassendi inter epistolas ad eum scriptas.

tempus per B C ita recta Z ad rectam B F, sumantur inter rectas N F, B F, tot mediæ in continua proportione, ut R F, M F, N F, donec minor ex ipsis ut A F, sit minor quam recta Z, quod quidem necessariò eventurum vel ex sola mediæ inventione, ejusque iteratâ, quoties opus fuerit, operatione, quis non videt?

Erunt ergo continuæ proportionales rectæ AF, RF, MF, NF, BF, cùm autem sit ut A F, ad B F, ita B F, ad C F, & ita A B, ad BC, ergo poterit continuari proportio sub eodem numero terminorum, ut sint etiam proportionales B F, O F, V F, X F, C F, idque in eadem superiorum ratione.

His ita positis & constructis considerentur & comparentur singula spatia A R, R M, M N, N B, singulis spatijs B O, O V, V X, X C, singula nempe singulis, hoc est spatium A R, spatio B O: si igitur per spatium A R, fuerit motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto R acquisitum, tempus per A R, ad tempus per B O, componeretur ex ratione spatij A R, ad spatium B O, & vicissim ex ratione velocitatis per B, ad velocitatem per R, quod notissimum est, & Galileus ipse demonstravit propositione quintâ tractatus de motu æquabili.

At ut spatium A R, ad spatium B O, ita per primam propositionem recta A F, ad rectam B F, & ut velocitas per B, ad velocitatem per R, ita ex supposita motus accelerati juxta spatia decursa definitione, recta B F ad rectam R F, ergo tempus per A R, hoc casu ad tempus per B O, componeretur ex ratione A F, ad B F, & ex ratione B F, ad R F, esset igitur motus per A R, ad motum per B O, ut recta A F, ad rectam R F: deinde si per spatium R M, fieret motus uniformis juxta gradum velocitatis in O acquisitum, câdem ratione probabitur motum per R M, ad motum per O V, esse ut recta R F, ad rectam M F: similiter considerando velocitates punctorum N, & V, erit tempus per M N, ad tempus per V X, ut M F, ad M F: denique considerando velocitates punctorum B, & X, in ultimis spatijs erit tempus per R B, ad tempus per X E, ut N F, ad B F, sed omnes ejusmodi rationes nempe A R, ad R F, R F, ad M F, M F ad N F, N F, ad B F, ex constructione sunt eædem.

Ergo tempus omnium motuum per totam A B, ad tempus omnium motuum per totam B C, in utrisque spatijs, ita ut diximus, consideratorum est ut recta A F, ad RF, sive N F, ad B F, sed tempus motus accelerati per A R, est minus tempore motus per A R uniformis juxta velocitatem in R, cùm enim à puncto R, usque ad punctum A, perpetuò ex hypothesi velocitas crescat, ergo à puncto R, ad punctum A, citiùs per motum acceleratum pervenitur, quàm si velocitas acquisita in R, eadem & uniformis usque ad punctum A, perseveraret. Eâdem ratione probabitur tempus motus accelerati per R M esse minus tempore motus uniformis per R M, si velocitas ipsius ultimo ipsius spatij M puncto respondeat. Denique constat motum per totam AB, acceleratum, ut fiet hypothesis, minori tempore fieri quàm motum alium fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates ultimis spatiorum A R, R M, M N. NB, punctis respondentes compositum, at contra tempus motus accelerati per B O, est majus tempore motus uniformis per B O, considerati juxta velocitatem puncti B, quia velocitas à puncto B, ad O, semper crescit in motu accelerato, juxta hypotesin, & minor semper est velocitate, quæ respondet puncto B: unde pari ratiocinio concludetur motum per totam B C, acceleratum, ut fiet hypothesis, majori tempore fieri, quàm motum illum fictitium ex motibus uniformibus juxta velocitates primis spatiorum B O, O V, V X, X C, punctis respondentes compositum.

Cum ergo tempus motus accelerati per A B, sit minus tempore motus illius fictitij per eandem A B, & contra tempus motus accelerati per B C, sit majus tempore motus illius fictitij per eandem B C, ergo minor est ratio temporis motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C, quàm temporis motus fictitij per AB, ad tempus motus fictitij per BC: sed ut tempus motus accelerati per AB, ad tempus motus accelerati per B C, ita posuimus esse rectam Z ad rectam B F, & ut tempus

motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita demonstravimus esse N F, ad B F, ergo minor est ratio rectæ Z ad rectam B F, quàm rectæ N F, ad eamdem B F, quod est absurdum, cùm recta Z sit major recta N F.

Ergo tempus motus accelerati per A B, non est majus tempore motus accelerati per B C. Eâdem facilitate probabimus tempus motus per A B, accelerati non esse minus tempore motus accelerati per B C: sit enim minus, si fieri potest, erit igitur ut tempus motus per AB, accelerati ad tempus motus accelerati per B C, ita recta minor ipsa B F, ad ipsam B F, esto itaque recta illa minor quam B F G, & sit tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C, ut G, ad rectam B F, & inter rectas B F, C F, exponatur continuè proportionalium series quarum maxima O F, sit major quàm G. Eodem quo usi sumus in superiori demonstrationis parte ratiocinio conferendo spatia in ipsa B, inter similes proportionales intercepta, cum spatijs B O, O V, V X, X C, mutemus solummodo velocitates uniformes, & fingamus verbi gratiâ motum per A R, uniformem fieri juxta gradum velocitatis in puncto A acquisitæ, motum verò uniformem per B O, fieri juxta velocitatem acquisitam in puncto, O & sic in reliquis spatijs in quibus patet omnes velocitates per A B, uniformes augeri, velocitates verò per B C, uniformes minui, contrà id quod in priore demonstrationis parte fuerat usurpatum. Concludetur ut suprà tempus motus hujusmodi uniformis per A R, ad tempus motus uniformis per B O, esse ut recta R F, ad rectam A F, dum enim augentur velocitates, tempora motuum minuuntur: similiter tempus motus uniformis per R M, ad tempus motus uniformis per O V, erit ut M F, ad M R: denique tempus motus fictitij illius per A B, ex uniformibus compositi ad tempus motus fictitij per B C, ex uniformibus pariter compositi erit ut R F, ad A F, cum omnes rationes sint eædem, hoc est ut O F, ad BF, per primam propositionem.

Tempus autem motus accelerati per A B, est majus tempore motus illius fictitij ex uniformibus compositi, cum supposuerimus in motibus uniformibus auctas fuisse velocitates, quæ nimirùm in hoc casu primis spatiorum A R, R M, &c. punctis respondent; sed & tempus motus accelerati per B C, est minus tempore motus fictitij ex uniformibus compositi, quia hîc velocitates minuuntur, & ultimis spatiorum B O, O V, &c. punctis respondent. Ergo major est ratio temporis motus accelerati per B C, quam temporis motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C: sed ut tempus motus accelerati per A B, ad tempus motus accelerati per B C; ita est recta G, ad rectam B F, ex suppositione: ut autem tempus motus fictitij per A B, ad tempus motus fictitij per B C, ita recta O F, ad B F, ex demonstratione; ergo recta G, ad rectam B F, majorem proportionem habet, quàm recta O F, ad rectam B F, quod est absurdum, cùm recta G, sit minor rectâ OF, ex constructione: non ergo tempus motus accelerati per AB, est minus tempore motus accelerati per BC, sed nec majus ut supra demonstratum est, ergo est æquale. Eadem ratione patet tempus motus accelerati per C D, æquari tempori motus accelerati per A B, & tempori motus accelerati per B C, & continuatis, si placet, in infinitum rationibus, omnia omninò spatia eodem tempore percurri.

A B C D E F G H K

A B C D E F G K

His positis tertiâ propositione mentem Galilei revelamus, aut propositionis verita-

tem astruimus. Intelligatur motus gravium descendentium à quiete ex puncto A usque ad punctum H, verbi gratia, & supponatur, si fieri potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A, usque ad H, tempore unius minuti, aut altero quovis tempore determinato, & supponatur motus continüari usque ad punctum K, aio motum per HK, fieri in instanti. Si enim motus per HK, non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod per aliquem numerum multiplicatum excedet tempus in decursu spatij AH insumptum. Ponatur numerus multiplicans 5. ita ut tempus motus per HK, quinquies sumptum eccedat tempus motus per AH, rectis KA, HA, sumatur tertia proportionalis GA, & toties continüetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum numerus excedat numerum quinque: fiant ergo ex proportionalibus continüatis sex, verbi gratiâ, spatia ultra punctum H, quæ sint HG, GF, FE, ED, DE, CB, ergo tempus motus per HG, per præcedentem est æquale tempori motus per HK, similiter tempus motus per GF, est æquale tempori motus per HK. Denique motus per totam HB, fiet in tempore quod ad tempus per HK, erit sextuplum. At tempus temporis per HK, quintuplum est majus tempore motus per AH, ergo à fortiori tempus motus per HB, tempore motus per totam HA, est majus, quod est absurdum. Ergo vera remanet Galilei illatio quamvis eam ipse non demonstrârit.

Hæc breviter & familiariter, Clarissime Gassende, scripsimus, ne tibi imposterùm facessat negotium aut Cazræus, aut quivis alius Galilei adversarius, & in immensum excrescant volumina, quæ unicâ demonstratione, vel fatentibus ipsis authoribus aut destruentur, aut inutilia & superflua efficientur. Vale.

*Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de ****

MONSIEUR,

Il y a déja quelque temps que Monsieur le President de Donneville s'étant donné la peine de me venir voir, me laissa un écrit de Monsieur de Fermat touchant l'accroissement de vîtesse qui est en la cheute des corps, & parce que je n'ay point eu l'honneur de le revoir depuis, & que je ne sçay point son logis pour le luy pouvoir rendre, & que d'ailleurs il me semble qu'il me dit en passant qu'il avoit charge de vous le remettre aprés qu'il me l'auroit monstré, je me suis advisé de vous l'envoyer sans plus attendre, avec les tres-humbles remerciemens que je dois à mondit sieur de Fermat de la bonté qu'il a eüe de m'en donner la communication. Il seroit superflu de vous dire, combien j'en suis satisfait, puisque comme vous sçavés mieux que tout autre rien ne peut partir d'une telle main qui ne soit parfait en tout point. Je suis, &c.

*Lettera del Signor Benedetto Castelli Abbate di Verona, al Signor di *****

ILL.^{MO} ED ECC.^{MO} SIG.^{RE}

Ho Letti i pensieri sottilissimi del Sig.^{r} di Fermat intorno al centro di gravita, e confesso liberamente che mi sono parsi belli, & degni di quello sublime intelletto, che mi fu celebrato con alta lode dal Signor di Beaugrand, quando passò per Roma, e voglio credere che ne habbia assoluta dimostratione; e perche il Sig.^{re} di Beaugrand mi disse di havere dimostrata una simile propositione, cioè, che il medesimo grave posto in diverse lontananze dal centro della terra pesava inegualmente, e che il peso al peso era come la distanza alla distanza dal centro della terra, io mi applicai à pensare à questa materia, e pretesi allhora di havere ritrovata la dimostratione, mà dopo essendo mi state promosse alcune difficoltà, mi raffreddai in questa specolatione: mi ricordo però che ancor io ne deducevo la medesima consequenza, che deduce ancora il Signor di Fermat, cioè, che il grave che haverà il suo centro di gravità col centro della terra non haverà peso alcuno: e di più che la terra tutta non ha peso: e in oltre ne cavai, che descendendo un grave verso il centro della terra non solo và mutando peso di momento in momento, ma (cosa che puo parere più marauigliosa) il suo centro di gravità si va continuamente movendo nella mole di esso grave; di più che un grave di qualsivoglia figura che si mova in se medesimo circolarmente pure va continuamente mutando il suo centro di gravità: e per tanto facilmente concorro con il Sig^{r}. di Fermat, che il centro di gravità non sia in natura tale quale l'hanno descritto comunemente i Mechanici: e se io credessi che le mie debolezze potessero esser care al Signor di Fermat, gli ne mandarei una copia, non solo per ricevere documenti da S. Sig.^{ria} Illma ma per fare acquisto di un tale e tanto padrone, al quale prego V. S. J. dedicarmi servitore di singolare devotione, e li bacio le mani.

VIRO CLARISSIMO DOM. DE RANCHIN, Sen. Thol. Petrus de Fermat S. P.

POlyænum tibi tuum, Vir Clarissime, mitto, sed observanda in eo quædam suppeditat codex manuscriptus optimæ notæ auctorum rei militaris hactenus ineditorum quem penes me habeo; apud eum collectionem quamdam præceptorum & monitorum militarium inveni sub nomine Παρεκβολῶν, cujus auctorem licet manuscriptus non detegat, colligo tamen ex glossario Græcobarbaro Meursij, eum esse Heronem, non illum quidem Alexandrinum cujus spiritalia & alia quædam opuscula extant, & qui antiquo, hoc est, optimo ævo, Græcè scripsit, sed alium posterioris ævi, quod pleraque ipsius vocabula Græcobarbara satis innuunt; utrumque, ætatem nempe & nomen auctoris, confirmat Meursius in voce κοντοβέργιον ubi citantur sequentia Heronis verba in παρεκβολαῖς, ἀπίσειλε γοῦν τῆς νυκτὸς εἰς τὰ ἄπληκτα αὐτῶν καὶ τὰ κοντοβέργια, hæc enim verba cum in meo manuscripto desint, supplendum in eo nomen auctoris ex manuscripto Meursii; tempus vero quo hæc scribebantur & quo voces ἄπληκτον & κοντοβέργιον in usu erant, ultra septingentos plus minùs annos non videtur excurrere;

hoc autem παρεκβολῶν tractatu, pleraque Polyæni ſtratagemata ſuppreſſo authoris nomine alijs ſæpe verbis referuntur, quandoque & ijſdem, unde ampla emergit emendationum & notarum criticarum penus; celebriores aliquot tibi, vel ſi mavis doctis omnibus tuo nomine jure repræſentationis libenter exhibeo.

Cleomenis ſtratagema narratur lib. 1. Polyæni pag. 20. editionis Tornæſianæ ſequentibus verbis, Κλεομένης Ἀργείοις ἐπολέμει καὶ ἀντεςρατοπέδευον, ἦν τοῖς Ἀργείοις ἀκριβὴς φυλακὴ τῶν δρωμένων τοῖς πολεμίοις, καὶ πάντα ὅσα Κλεομένης βούλοιτο ὑπὸ κήρυκος ἐσήμαινε τῷ ςρατῷ, καὶ αὐτοὶ τὰ ἴσα δρᾷν ἐσπούδαζον, ὁπλιζομένων ἀνθωπλίζοντο, ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, ἀναπαυομένων ἀντανεπαύοντο, Κλεομένης λάθρα παρέδωκεν ὅταν ἀριστοποιεῖσθαι κηρύξῃ, ὁπλίσασθαι, ὁ μὲν ἐκήρυξεν, οἱ δὲ Ἀργεῖοι πρὸς ἄριστον ἐτράποντο, Κλεομένης ὡπλισμένους ἐπαγαγὼν ἅμα πᾶσιν ἀνόπλους καὶ γυμνοὺς τοὺς Ἀργείους ἀπέκτεινεν, hoc loco poſt verba ἐξιόντων ἀντεπεξῄεσαν, addendum ex manuſcripto ἀριςώντων, ἠρίςων, quod finis ipſius ſtratagematis pleniſſimè confirmat.

Themiſtoclis ſtratagema, eodem libro pag. 44. refertur hoc modo, Θεμιςοκλῆς Ἰώνων Ξέρξῃ συμμαχούντων, ἐκέλευσε τοῖς Ἕλλησι χαράττειν ἐπὶ τῶν πετρῶν, Ἄνδρες Ἴωνες οὐ δίκαια ποιεῖτε ςρατεύοντες ἐπὶ τοὺς πατέρας, τούτων ἀναγινωσκομένων βασιλεὺς ὑποπτεύους αὐτοὺς ἐποιήσατο, corrigendum ex manuſcripto ἐλογίσατο, quam eſſe veram lectionem innuit ſenſus.

Ageſilai ſtratagema occurrit lib. 20. pag. 86. Ἀγησίλαος, ait ille, ἐν Κορωνείᾳ Ἀθηναίους νενικηκώς, ἤγγειλέ τις, οἱ πολέμιοι φεύγουσιν εἰς τὸν νεὼν τῆς Ἀθηνᾶς, ὁ δὲ προσέταξεν ἐᾶν αὐτοὺς οἷ καὶ βούλοιντο ἀπιέναι, ὡς ἄρα εἴη σφαλερὸν συμπλέκεσθαι τοῖς ἐξ ἀπονοίας μαχομένοις, ibi loco vocis Ἀθηναίους reponendum ex manuſcripto Θηβαίους.

Aliud Ageſilai ſtratagema refert Polyænus eodem libro pag. 103. Ἀγησίλαος ἐν ταῖς διαπρεσβείαις ἠξίου τῶν πολεμίων τοὺς μάλιςα δυνατοὺς πέμπεσθαι πρὸς αὐτὸν οἷς διαλέξηται περὶ τῶν κοινῇ συμφερόντων, τούτοις ἐπὶ πλεῖςον συγγενόμενος, καὶ κοινωνῶν ἑςίας καὶ σπονδῶν, ταῖς πόλεσιν ςάσιν ἐνεποίει διὰ τὰς τῶν πολλῶν ὑποψίας. Vulteius hoc modo interpretatur: Ageſilaus in legationibus petebat ab hoſtibus ut maxime potentes ad ſe mitterent; cum quibus de communi utilitate ſermones conferret, cum his plurimum habens conſuetudinis, & communicans focum ac cineres, ſeditiones in urbibus excitabat propter vulgi ſuſpiciones. Videtur interpres loco verbi σπονδῶν quod eſt in textu Græco, legiſſe σποδῶν cum vertat cineres, ſed nihil mutandum ex manuſcripto evincitur ubi leguntur hæc verba καὶ ὅρκους πρὸς αὐτοὺς ποιούμενος.

Clearchi ſtratagema narratur libro eod. pag. 110. his verbis, Κλέαρχος ὢν ἐν Θρᾴκῃ, νυκτερινοὶ φόβοι τὸ ςράτευμα κατελάμβανον, ὁ δὲ παρήγγειλεν, εἰ γένοιτο νύκτωρ θόρυβος, μηδένα ὀρθὸν ἀνίςασθαι, ὁ δὲ ἀναςὰς ἀναιρείσθω, τὸ παράγγελμα τοῦτο ἐδίδαξε τοὺς ςρατιώτας καταφρονεῖν τοῦ νυκτερινοῦ φόβου. Verba quædam hîc ſupplenda ex manuſcripto, quæ tamen videtur in ſuo codice vidiſſe interpres Latinus, licet deſint in editione græcâ Tornæſij, ſunt autem ſequentia, καὶ οὕτως ἀνεπαύσαντο ἀναπηδῶντες καὶ ταρασσόμενοι. Atque ita deſierunt exilire ac perturbari.

Perdiccæ ſtratagema ſequens legitur libro 4. pag. 114. Περδίκκας Ἰλλυριῶν καὶ Μακεδόνων πολεμούντων ἐπειδὴ πολλοὶ Μακεδόνες ἡλίσκοντο ζωγρεῖν, καὶ οἱ λοιποὶ Μακεδόνες λύτρων ἐλπίδι πρὸς τὰς μάχας ἦσαν ἀτολμότεροι, ἐπικηρυκευσάντων περὶ λύτρων, ἐντειλάμενος τῷ κήρυκι ἐπανελθόντι ἀγγεῖλαι ὡς ἄρα λύτρα Ἰλλυριοὶ μὴ προσίοιντο, ἀλλὰ ψηφίσαιντο τοὺς αἰχμαλώτους κτείνειν. οἱ δὲ Μακεδόνες ἀπογνόντες τῆς διὰ τῶν λύτρων σωτηρίας εὐτολμότεροι πρὸς τὰς μάχας ἐγένοντο, ὡς ἐν μόνῳ τῷ νικᾷν ἔχοντες τὸ σώζεσθαι, quod ſic interpretatur Vulteius. Perdiccas Illyriis & Macedonibus bellum gerentibus cum multi Macedones caperentur vivi, reliqui etiam redemptionis ſpe ad pugnam minùs alacres erant, quibus legationem inter ſe de redemptoriis muneribus mittentibus, præcepit legato ut reverſus nuntiaret ſe redemptoria munera Illyriorum non accepturum, ſed condemnatos captivos morte affecturum, Macedones deſperatâ ſalute redemptivâ audaciores ad pugnandum reddebantur, quippe quibus in ſolâ victoriâ ſalus poſita eſſet. In hoc ſtratagemate vocem Ἰλλυριοὶ mutandam in Ἰλλυριῶν indicat nota marginalis editionis Tornæſianæ; ſi vera eſſet explicatio Vulteii, non ſolùm vera ſed & neceſſaria eſſet illa emendatio, ſed frigidiſſimum eſſet ſtratagema, ſi ſequeremur ſenſum interpretis: Polyænus quippe vult Perdiccam præcepiſſe legato, ut

reverſis nuntiaret Illyrios redemptoria munera non accepturos, & hic eſt verus ſenſus ſtratagematis, quem Hero aliis verbis, ſecundùm hanc quæ eſt vera & germana interpretatio, expreſſit in manuſcripto his verbis, ἐπιτηδεύσει τοιῦτον, παρεσκεύασε τινὰ ὡς πρέσβεια ἐλθόντα ἀπὸ τῶν πολεμίων εἰπεῖν ὅτι οἱ πολέμιοι ἐβουλεύσαντο καὶ ἀπεκήρυξαν ἵνα ὅσους κρατήσειαν αἰχμαλώτους ἀποκτείνωσι.

Alexandri ſtratagema refertur etiam lib. 4. pag. 248. verbis ſequentibus, Ἀλέξανδρος Δαρείῳ παρατάξεσθαι μέλλων, παράγγελμα τοῖς Μακεδόσιν ἔδωκεν. ἣν ἐγγὺς γένησθε τῶν Περσῶν εἰς γόνυ κλίναντες ταῖς χερσὶν διατρίβετε τὴν γῆν, ἢν δὲ ἡ σάλπιγξ ὑποσημήνῃ τότε δὴ ..... Μακεδόνες οὕτως ἐποίησαν, οἱ δὲ Πέρσαι σχῆμα προσκυνήσεως ἰδόντες, τὴν πρὸς τὸν πόλεμον ὁρμὴν ἐξέλυσαν καὶ ταῖς γνώμαις ἐγένοντο μαλακώτεροι. Δαρεῖος δὲ ἐκυδρεῦτο καὶ φαιδρὸς ἦν, ὡς ἀμαχὶ κρατῶν, οἱ Μακεδόνες ὑπὸ τῷ συνθήματι τῆς σάλπιγγος ἀναπηδήσαντες ῥύμηδον ἐμβάλλουσι τοῖς πολεμίοις καὶ τὴν φάλαγγα ῥήξαντες ἐς φυγὴν ἐτρέποντο.

Hoc loco deſunt quædam verba poſt vocem τότε, quæ ſupplenda ex manuſcripto ubi narratio eſt integra & elegans; lacuna itaque ex eo ſic replenda, τότε μετὰ θυμοῦ καὶ ἀνδρείας τοῖς πολεμίοις προσβάλλετε.

Pammenis ſtratagema tale proponitur libro 5. pag. 385. Παμμένης ὀλίγην ἔχων δύναμιν ὑπὸ πλειόνων ἀπαληφθεὶς ἔπεμψεν αὐτόμολον ἐς τὸ τῶν πολεμίων στρατόπεδον, ὁ δὲ σύνθημα ἐκμαθὼν ἤγγειλε τῷ Παμμένει, ὁ δὲ νυκτὸς ἐπιθέμενος τοῖς πολεμίοις, πολλοὺς αὐτῶν φθείρας διεξεπαίσατο αὐτοὺς σύνθημα, τοῖς δὲ ἦν ἀπορία γνωρίζειν ἐν σκότει τοὺς οἰκείους μὴ δυναμένοις διὰ τοῦ συνθήματος.

Hîc addenda ex manuſcripto poſt verbum αὐτοὺς ſequentia, αὐτὸς μὲν καὶ ὁ τούτου στρατὸς ἐγίνωσκον τὸ τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα, ἐκείνοις δὲ ἀπορία ἦν ἐν τῷ σκότει τῆς νυκτὸς γνωρίζειν τοὺς ἰδίους ἢ τοὺς πολεμίους, τῶν πολεμίων τὸ σύνθημα ἀποκρινομένων.

Pompiſci ſtratagema refertur lib. 5. pag. 402. Πομπίσκος πολιορκῶν πόλιν, ἐπὶ μὲν τὴν πολλὴν τῆς χώρας ἐξιέναι τοὺς πολεμίους ἐκώλυσεν, ἐπὶ δὲ τόπον ἕνα συνεχῶς .... καὶ τοῖς λῃζομένοις ἀπέχεσθαι τοῦ τόπου τούτου προσέταξεν, οἱ δὲ ἐκ τῆς πόλεως ἀδεῶς ἐνταῦθα προῄεσαν, ὁ δὲ παρὰ τῶν σκοπῶν, ὡς ἔμαθεν, τοὺς ἥκοντας πολλοὺς ἐπιθέμενος τοὺς πλείους αὐτῶν ἐχειρώσατο.

Vox συνεχῶς quæ hîc vulgò legitur, corrigenda ex manuſcripto & loco illius reponendum συνεχώρει quod ex conjecturâ viderat Caſaubonus ut patet ex ipſius notis.

Alexandri Pherenſis ſtratagema refertur lib. 6. pag. 426. Ἀλέξανδρος Πάνορμον πολιορκοῦντος Λεωσθένους πρὸς ἁπάσας τὰς Ἀττικὰς ναῦς φανερῶς ναυμαχεῖν οὐ θαρρῶν, διέπεμψεν ἐπὶ ἀκάτιον νύκτωρ, &c. legendum eſſe, ἐπὶ ἀκατίῳ, ut vult Caſaubonus in notis, confirmat codex manuſcriptus ubi legitur διὰ μικροῦ πλοιαρίου, quæ verba idem ſonant.

Cyri ſtratagema narrat Polyænus lib. 70. pag. 477. his verbis. Κῦρος Μήδοις παραταξάμενος τρὶς ἡττήθη; ἐπεὶ δὲ Περσῶν αἱ γυναῖκες καὶ τὰ τέκνα ἦσαν ἐν Πασαργάδαις ἢ τετάρτην μάχην ἐνταῦθα συνῆψε, πάλιν ἔφυγον οἱ Πέρσαι, ὡς δὲ ἶδον τὰ τέκνα καὶ τὰς γυναῖκας, παθόντες ἐπ' αὐτοῖς ἀνέστρεψαν, καὶ τοὺς Μήδους ἀτάκτους διώκοντας τρεψάμενοι, νίκην τοιαύτην ἐνίκησαν, ὡς μηκέτι Κῦρον πρὸς αὐτοὺς ἄλλους δεηθῆναι μάχης.

Hic loco vocis παθόντες corrigendum ex manuſcripto συμπαθόντες, quæ vox itidem reſtituenda in ſtratagemate Apollodori pag. 435. manuſcriptus noſter ex quo coniicimus vocem παθόντες mutandam in συμπαθόντες verbis ſequentibus rem narrat & ſtratagema Polyæni exprimit, οἱ δὲ συμπαθείᾳ τούτων νικώμενοι, &c. vox autem illa melius authoris ſenſui reſpondet quam τὸ παθόντες vt legendum cenſuit Caſaubonus.

Darii ſtratagema narratur lib. 7. pag. 489. hoc modo. Δαρεῖος ἐπολέμει Σάκαις τριχῇ διῃρημένοις, μιᾶς ἑκάστης μοίρας, τῶν δὲ Σακκῶν ἰζόντων τὰς ἐσθῆτας καὶ τὸν κόσμον καὶ τὰ ὅπλα παρέδωκε τοῖς Πέρσαις &c. hîc loco vocis ἰζόντων quæ eſt corrupta in editione Tornæſii, legendum ex manuſcripto ἀναιρεθέντων.

Scipionis continentiæ exemplum laude digniſſimum refertur lib. 8. pag. 568. ſequentibus verbis, Σκιπίων ἀνδράποδον λαβὼν ἐν Ἰβηρίᾳ πόλιν Φοινίσσαν, ὡς οἱ ψυχαγωγοὶ παρθένον ἤγαγον κάλλει ὑπερφυεῖ ἔχουσαν, τὸν πατέρα αὐτῆς ἀναζητήσας ἐχαρίσατο αὐτῷ τὴν θυγατέρα, τοῦ δὲ δῶρα προσκομίσαντος, ὁ δὲ καὶ ταῦτα συνεχαρίσατο, προῖκα φήσας ἐπιδιδόναι τῇ κόρῃ, &c. ibi vulgò legitur ψυχαγωγοὶ quod interpres vertit captivorum ductores, ſed legendum ex manuſcripto, νυμφαγωγοί, hoc eſt virginum ductores, quæ correctio & veriſſima, & elegantiſſima, ut nullus ſuperſit dubitandi locus.

Plura adjungerem, ſed feriis jam deſinentibus quarum beneficio otium ſuppetebat, finem quoque huic παρεκβολῶν παρεκβολῇ imponimus. Vale & me ama.

Cc 4

VIRO CLARISSIMO D. DE PELLISSON, Libellorum ſupplicum Magiſtro.

Samuel de Fermat. S. P.

CRiticas obſervationes quas mihi nuper miſiſti, vir clariſſime, ſæpius legi non ſine voluptate & admiratione; in illis enim ingenii, judicii, & doctrinæ dotes quas in te jampridem ſuſpicimus ubique elucent: nihil autem invenire poſſim quod tanti muneris vice tibi referam, niſi commodùm egeſtati meæ ſuccurrerent variæ lectiones quas vir tibi ſingulari conjunctus amicitiâ, cujus mihi jucunda ſemper eſt recordatio, margini appoſuit quorumdam librorum quos ſedulò pervoluebat, & quorum pleraque loca, ſed ἐν παρέργῳ, emendavit; ſcis enim quàm præcoci ille ubertate florum amænitatem fructuum maturitati junxerit, nec me latet quantâ ipſe fiduciâ ſuas exercitationes ſolitus ſit in tuum ſinum effundere; licet autem omnes iſtæ quas excerpſi emendationes, vel parentis mei conjecturæ, tibi novitatis gratiâ non commendentur, illas tamen, quæ tua eſt comitas, te benignâ manu ſuſcepturum non dubito.

Theonem Smyrnæum, ne te diutius morer, vir clariſſime, noſti, auctorem operis illius cui titulus τῶν κατὰ μαθηματικὴν χρησίμων εἰς τὴν τοῦ Πλάτωνος ἀνάγνωσιν, quod prodromi inſtar eſt aut iſagoges Philoſophiæ Platonicæ, quæ nemini Geometriâ non initiato patebat: illud opus edidit Lutetiæ anno 1644. Iſmael Bullialdus vir doctiſſimus & Latinitate donatum elegantibus notis illuſtravit; ſed non omnibus illud mendis purgaſſe videtur, ut aliquot, ni fallor, exemplis, quæ ſequuntur, planum fiet.

Primum occurrit pag. 78. illius operis ubi περὶ ἁρμονίας & συμφωνίας agit: locum illum exſcribere non piget, ipſa enim ſeries emendationis procul dubio neceſſitatem, & veritatem oſtendet; τὰ γράμματα, ait ille, φωναὶ πρῶται εἰσὶ καὶ διαιρετοὶ καὶ ἐλάχισται, & inferiùs, τὰ δὲ διαστήματα ἐκ τῶν φθόγγων ὥσπερ πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ διαιρετικαὶ καὶ στοιχειώδεις, huic voci διαιρετικαὶ aſteriſcus in margine reſpondet cum voce διαιρετοὶ, at hîc reponenda bis videtur vox ἀδιαίρετοι loco τοῦ διαιρετοὶ & διαιρετικαὶ, legendum nempe γράμματα φωναὶ εἰσὶ ἀδιαίρετοι, idque confirmat Manuel Bryennius cap. 1. lib. 2. Ἁρμονικῶν: legendum præterea φθόγγοι ὥσπερ πάλιν φωναὶ εἰσὶ πρῶται καὶ ἀδιαίρετοι, & hæc quoque lectio confirmatur verbis ejuſdem Bryennii lib. 1. cap. 3. ubi dicit φθόγγος ἐστὶ ἀρχὴ ἁρμονίας ὡς ἡ μονὰς τοῦ ἀριθμοῦ, τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς, καὶ τὸ νῦν τοῦ χρόνου, punctum, vero & inſtans ſunt ἀδιαίρετα & conſequenter φθόγγος ἀδιαίρετος, non dividendi vim habens, ut uvlt interpres Latinus: nec immerito Bacchius Senior in introductione artis muſicæ quæſtioni illi τί ἐστιν ἐλάχιστον τῶν μελῳδουμένων, reſpondet, φθόγγος, quem non tantum ἐλάχιστον, ſed etiam ἄτομον eſſe docet antiquæ muſicæ celeberrimus auctor Ariſtides Quintilianus lib. 1. de Muſicâ, atque ita authoritas æque ac ratio ſuffragatur huic emendationi, quæ fit unius tantum litteræ mutatione. Minimâ quoque mutatione alia fit eodem capite licet minoris momenti correctio, ubi vulgò male legitur, φησὶ καὶ τοὺς Πυθαγορικοὺς, legendum ſcilicet, φασὶ, ut apud Bryennium λέγων. Paulò inferiùs ubi legitur ἀποτελεῖται ὁ φθόγγος βραδείας δὲ βαρὺς, καὶ σφοδρᾶς μὲν μείζων ἦχος, ἠρέμα δὲ μικρὸς, legendum videtur ἠρεμαίας, & Bryennii authoritate confirmatur.

Hactenus de ſono de quo agitur in cap. illo 6. In cap. vero 8. agitur de ſemitonio, & ita vulgò legitur κατὰ καὶ τὸ ἡμίτονον γράμμα ἐκ τῆς ἡμίσου φωνῆς καλοῦμεν ἀλλ' ὡς μὴ τῷ αὐτοτελεῖ κατὰ ταυτὸ φωνεῖν, legendum vero videtur καθὸ non κατὰ: legendum præterea ἀλλ' ὡς μὴ αὐτοτελῆ καθ' αὑτὸ φωνὴν ἀποτελεῖν, quæ lectio ejvſdem Bryennii authoritate nixa veriorem vulgatâ ſenſum efficit.

Atque

Atque harum probatio lectionum desumi potest, ἐκ τῶν περὶ τοῖς μετρικοῖς ἀποδεδειγμένων καὶ ἐκ τῶν περὶ τοῖς μαθηματικοῖς λαμβανομένων, ut Porphyrii verbis utar, quæ in commentariis clarissimi interpretis referuntur pag. 276. sed non sine mendo, malè enim ibi legitur, ἐκ τ ὑπὸ τοῖς μετρικοῖς ἀποδεδειγμένων.

Nec silentio prætermittenda est elegantissima, & audacter dicam, certissima alterius loci ejusdem Theonis emendatio paginâ 164. ubi de octonario loquitur: refertur ibi vetus inscriptio quam in columna Ægyptiaca reperiri tradidit Evander hoc modo, Πρεσβύτατος πάντων Ὄσιρις θεοῖς ἀθανάτοις πνεύματι καὶ οὐρανῷ ἡλίῳ καὶ σελήνῃ καὶ γῇ καὶ νυκτὶ καὶ πατρὶ τῶν ὄντων καὶ τῶν ἐσομένων ΕΡΩΤΕ μνημεῖα τῆς αὐτοῦ ἀρετῆς βίου συντάξεως, id est, ut vertit Bullialdus, antiquissimus omnium Rex Osiris diis immortalibus Spiritui, & Cœlo, Soli, & Lunæ, & terræ, & Nocti, & Diei, & patri eorum quæ sunt quæque futura sunt, prædicabo memoriam magnificentiæ ordinis vitæ ejus: mendosum procul dubio in hac inscriptione illud ΕΡΩΤΕ, & hanc lectionem si retineas quis inde sensus elici poterit? legendum igitur ΕΡΩΤΙ, atque ita parvâ unius scilicet litteræ mutatione huic loco sua lux, & amori sua laus facile restituitur; nec aliena est ab hoc loco sapientissimi Platonis, cujus velut interpres Smyrnæus ille, sententia, dum ait in convivio καὶ μὲν δὴ τήν γε τῶν ζώων ποίησιν πάντων τίς ἐναντιώσεται μὴ οὐχὶ ἔρωτος εἶναι σοφίαν ᾗ γίγνεται καὶ φύεται πάντα τὰ ζῷα, etenim animalium omnium effectionem, ut vertit Serranus, ex amoris sapientiâ existere, idest gigni atque nasci ecquis negaverit,

Per quem genus omne animantum
Concipitur, visitque exortum lumina Solis.

Apud Iulium Frontinum de aquæductibus Romæ pag. 106. editionis Plantinianæ, vulgò sic legitur: in vicenariâ fistulâ, quæ in confinio utriusque rationis posita est, utrique rationi penè congruit. Nam habet secundùm eam computationem, quæ interjacentibus modulis servanda est in diametro quadrantes viginti: cùm diametri ejusdem digiti quinque sint, & secundùm eorum modulorum rationem qui sequuntur ad eam, habet digitorum quadratorum ex gnomoniis viginti. Hîc procul dubio legendum non ad eam, sed aream: cujus emendationis ratio ex supputatione geometrica ducitur.

Eâdem etiam paginâ legitur, centenaria autem & centenum vicenum, quibus assiduè accipiunt, non minuuntur, sed augentur, Nec usu frequens est: videtur legendum Cen. idest centenaria, loco vocis illius Nec, litteris scilicet ordine inverso accipiendis, cum fortasse in manuscripto repertum fuerit Cen hoc est centenaria, quod transcriptor transposuit & legendum Nec, particulâ sensui magis, ut videbatur, accommodatâ perperam existimavit.

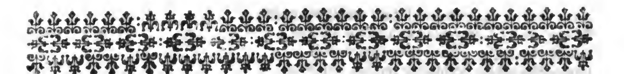
His emendationibus unam aut alteram duorum insignium locorum addam, quorum primus est apud Sextum Empyricum, alter apud Athenæum: Sextus ille lib. 1. Pyrrhoniarum hypotyposeon pag. 12. ostendere conatur quam variæ sint pro diversitate ætatum Phantasiæ, παρὰ δὲ τὰς ἡλικίας, inquit, ὅτι ὁ αὐτὸς ἀὴρ τοῖς μὲν γέρουσι ψυχρὸς εἶναι δοκεῖ, τοῖς δὲ ἀκμάζουσιν εὔκρατος καὶ αὐτὸ βρῶμα τοῖς μὲν πρεσβυτέροις ἀμαυρὸν φαίνεται, τοῖς δὲ ἀκμάζουσι κατακορὲς, καὶ φωνὴ ἡ αὐτὴ τοῖς μὲν ἀμαυρὰ δοκεῖ τυγχάνειν τοῖς δὲ ἐξάκουστος, id est, ut vertit Henricus Stephanus, ex ætatibus autem quoniam idem aër senibus quidem frigidus esse videtur, aliis qui in ætatis flore constituti sunt bene temperatus, & idem cibus senibus quidem tenuis videtur, at iis qui florent ætate crassus, eodem modo & vox eadem, aliis quidem depressa esse videtur, aliis vero alta; at hujus loci elegantior sensus erit si legatur non βρῶμα sed χρῶμα, alioquin de sensu visus qui facilè maximam mutationem patitur, nullus hîc foret sermo: prætereà τὸ ἀμαυρὸν meliùs colori convenit quam cibo, & æquè de colore ac de cibo dici potest τὸ κατακορὲς, sic apud Virgilium legimus, *saturatas murice vestes, & hyali saturo fucata colore.*

Nunc ad Athenæi locum transeo; quis autem urbanissimi illius scriptoris sales variâ conditos eruditione ignorat? Et si quid in eo frigidum aut inficetum occurrat, quis ibi mendum subesse non suspicetur? Suspecta igitur erit lectio loci illius in quo hic auctor lib. 12. loquitur de depravatis Alcibiadis moribus, qui locus si uulgatam lectionem

retineas ipso forsan Alcibiade depravatior erit : Athenæi verba hæc sunt, Λυσίας δ' ὁ ῥήτωρ περὶ τῆς τρυφῆς αὐτοῦ λέγων φησὶν, ἐκπλεύσαντες γὰρ κοινῇ Ἀξίοχος καὶ Ἀλκιβιάδης εἰς Ἑλλήσποντον ἔγημαν ἐν Ἀβύδῳ δύο ὄντε Μεδοντιάδα τὴν Ἀβυδηνὴν καὶ Ξυνοικείπην, ἔπειτα αὐτοῖν γίνεται θυγάτηρ ἣν οὐκ ἔφασαν δύνασθαι γνῶναι ὁποτέρου εἴη, ἐπεὶ δ' ἦν ἀνδρὸς ὡραία ξυνεκοιμῶντο καὶ ταύτῃ καὶ εἰ μὲν χρῷτο καὶ ἔχοι Ἀλκιβιάδης Ἀξιόχου ἔφασκεν εἶναι θυγατέρα, εἰ δὲ Ἀξίοχος Ἀλκιβιάδου : error hîc procul dubio in voce illa ξυνοικείπην, & legendum ξυνοικεῖτην hoc est concubuerunt , atque ita si falsa Xynoceipe deleatur , & sola supersit illa duobus nupta Medontias , portentosæ istorum iuvenum libidinis novitati nihil detrahetur ; veritas autem istius emendationis satis per se patet , & ex ipsâ loci serie elici potest , in quo illud δύο ὄντε alioqui supervacaneum foret, nec jam amplius ambigua proles ; ratio igitur illius correctionis in promptu est , cui ejusdem Athenæi accedit authoritas, is enim lib. 13. iterum de Alcibiade loquitur hoc modo, Μεδοντίδος γοῦν τῆς Ἀβυδηνῆς ἐξ ἀκοῆς ἔστερξε καὶ πλεύσας εἰς Ἑλλήσποντον σὺν Ἀξιόχῳ ὃς ἦν αὐτοῦ τῆς ὥρας ἐραστὴς, ὥς φησὶ Λυσίας ὁ ῥήτωρ ἐν τῷ κατ' αὐτοῦ λόγῳ, καὶ ταύτης ἐκοινώνησεν αὐτῷ, id est ut interpretatur Dalechampius, Medontidem Abydenam auditione tantùm ille amare cœpit , & imprimis charam habuit , eam tamen cum Hellespontum navibus adiisset , Axiocho navigationis comiti , & pulchritudinis ipsius amatori , ut inquit Lysias in oratione quam contra eum scripsit , utendam dedit : ibi autem fictitiæ Xynoceipes nulla mentio , & illud ἐκοινώνησεν æque ac ξυνοικεῖτην communes Alcibiadis , & Axiochi amores fuisse satis arguit.

Sed ab istorum juvenum voluptate oculos avertamus , & eam quæ ex studiorum societate percipitur, puriorem & diuturniorem, summumque adversorum solatium litteras esse fateamur ; cum tu his mirum in modum oblecteris , non iniucundas tibi fore confido observationes in quibus amici manum agnosces ; ipsius ego lucubrationum sparsas varijs in locis reliquias è tenebris quibus abditæ jampridem erant , eruere conatus sum , neque hæc contemnenda duxi , ut ex hoc spicilegio rerum quæ diligentissimos , ut ita loquar , messores latuerunt , pateat , quantam earum auctor in liberiori & conjecturis aperto critices campo segetem fuerit collecturus, si sæpius in illo spatiari voluisset : Vale & me ama.





CEDE DEO,

SEU CHRISTUS MORIENS.

D. Petri de Fermat Carmen amœbæum ad D. Balzacum.

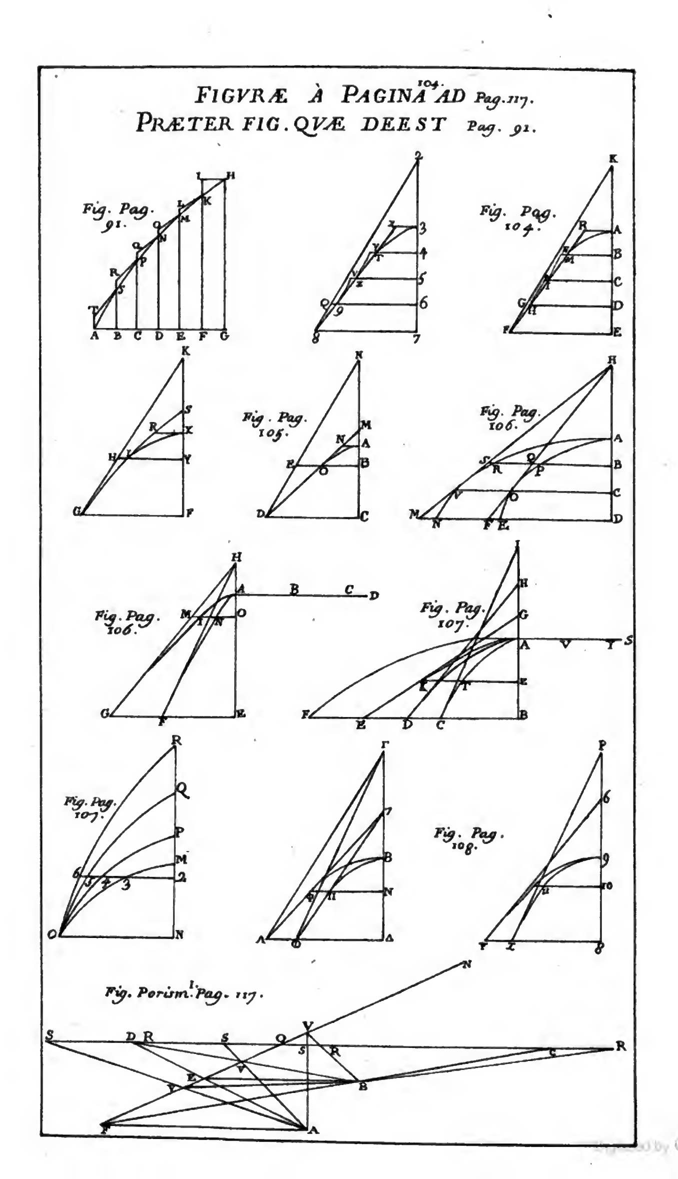
BSTUPUIT totiesque elusum mentis acumen
Dedidicit vanos veris præferre colores
Luminibus. Quid bella moves, deletaque pridem
Numina præstigiis linguæ solertis adumbras
Infelix ratio ? Num te simulachra tot annis
Desita, & imbelles Divûm sub imagine formæ
Fallaci cinxere metu ? Num te ostia Ditis
Aut stygiæ remorantur aquæ, Elysiive recessus,
Et quidquid credi voluit Dijs æqua potestas ?
Perge tamen quò te securo tramite ducunt
Balzaco præeunte viæ, nec inertia dudùm
Fatidicæ responsa Deæ, quercusve silentes
Dodonæ, aut taciti venerare oracula Phœbi ;
Cede Deo. Cessit veterum numerosa propago
Cœlicolûm : Deus ecce Deus, quem prona parentem
Agnoscit natura suum, cui terra, salumque
Paret, & edomitæ fatalia flabra procellæ,
Submittuntque ipsæ jam non sua murmura nubes.
Hic puro fulgore micans, de lumine lumen
Dum traheret, Deus unus erat, natusque supremi
Æternâ æternùm manans de mente parentis
Assumpsit veros morituræ carnis amictus,
Si qua forte queat mortalia flectere corda,
Tantillumque animis extundere possit amorem.
At postquam summi tandem mandata parentis
Horrendo sacrum caput objecere furori,
Humanas mœrenti animo depromere voces
Cœpit, & insolito succussus membra fragore,
Omnipotens, si nondùm orbem mala nostra piarunt,
Et placet infandum pœnæ genus, en, ait, adsum
Victima, lethiferoque libens succedo dolori.
Cerne tamen sudore madens & sanguine corpus,
Et si nulla super nostræ tibi cura salutis,
At saltem solare animum non digna ferentem.
Dixit & humentes oculos ad sydera tollens,
Quas non ille preces, quæ non suspiria fudit
Anxius ærumnisque gravis, tua, rector Olympi,

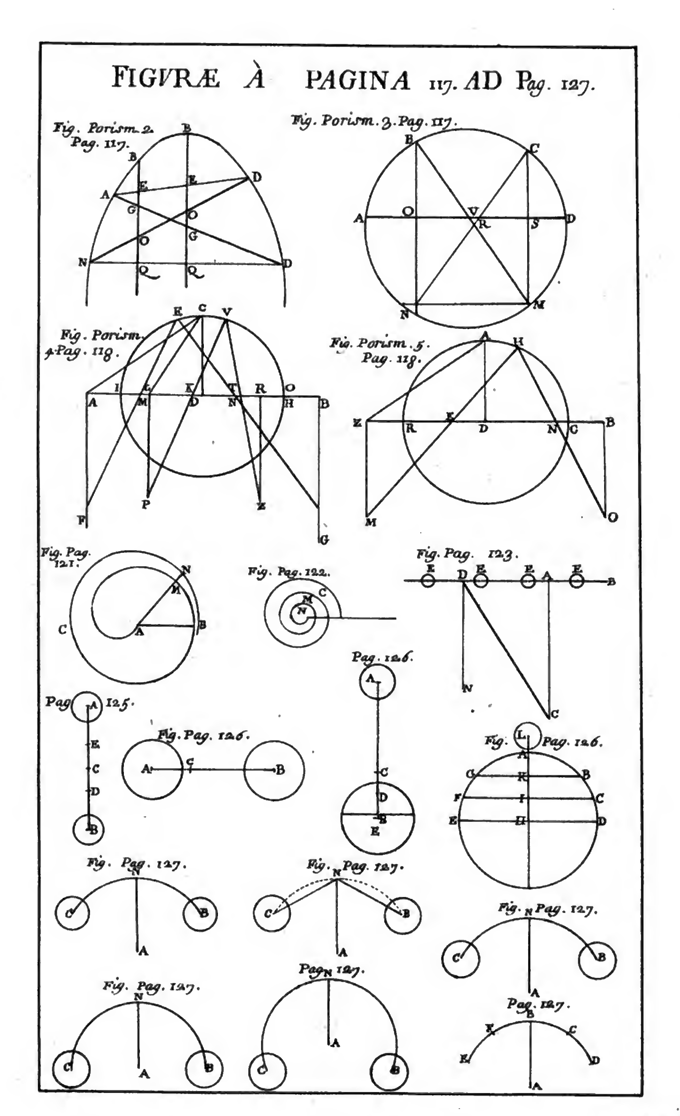
Ec

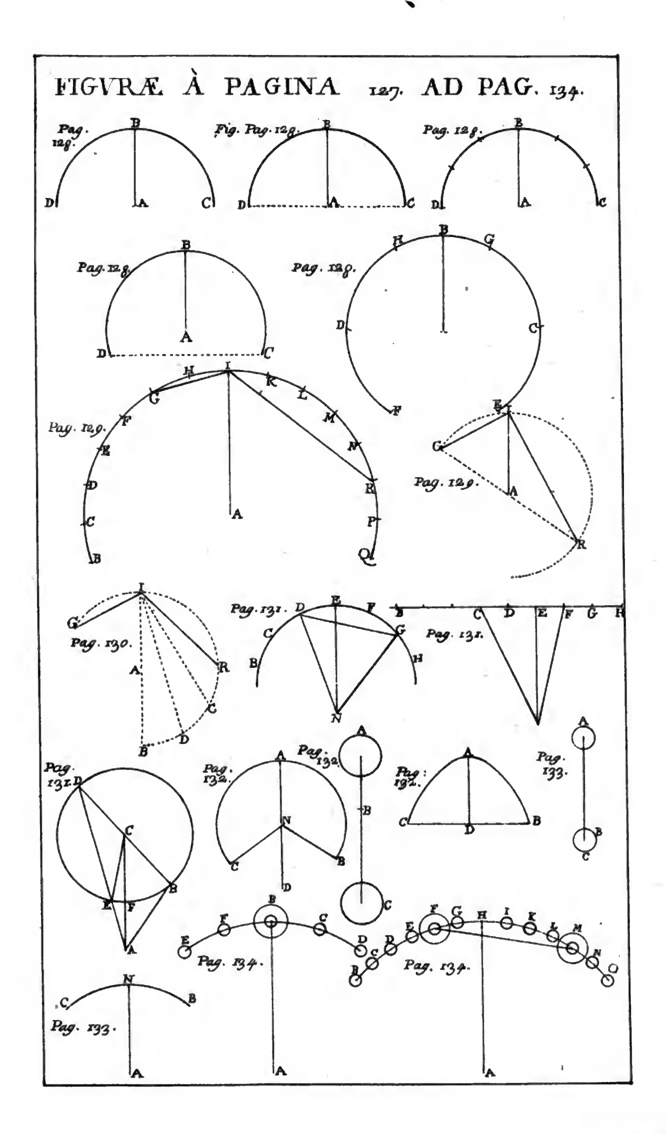
Dum satagit, mentemque futuræ accingere pugna
Sponte parat? Cœlo intereà demissus ab alto
Aliger, ut varios animi componeret æstus,
Improvisus adest, ceciditque repente fragorum
Turba minax, auctæque superno robore vires
Despectant longè pœnas, nondumque paratæ
Incubuere Cruci: nam cur, supreme, moraris
Rector, ait, cur me per tanta pericula vectum
Sistis, inexpletoque obices opponis amori?
Dixerat, humanisque iterum succumbere curis
Visa caro, tristes agitant præcordia motus,
Necdum securo gressu vestigia ponit.
Hæc inter dubiæ mentis certamina totam
Noctem orat, socios altus sopor urget inertes,
Quos decuit vigiles oranti impendere curas.
Heu pavidæ mentes, si nec cœlestia tangunt,
Nec veræ virtutis honos, hoc munere saltem
Defungi jurata fides, jussumque magistri
Debuit una sequi; sed jam strepit undique murmur,
Et segni tenebras abrumpunt lumine tædæ;
Quò se cumque feret, jam vis inimica propinquat,
Fictaque adorantis species, verique dolores
Non procul. Infausti tandem sub pondere ligni
Deficit, affixusque cruci, jam verbera passus,
Jam spinas, laceros spargens tormenta per artus,
Nempe urgebat amor, nostræque cupido salutis,
Humanam egressus sortem, mortique tremendus
Dum fieret morti propior, fremitusque, minasque,
Et conjuratæ spernens convicia turbæ,
Degeneri vitam populo pacemque precatur,
Nec, quas ipse tulit pœnas, tortoribus optat.
Et jam finis erat, violataque pectora puri
Muricis undantes spargebant undique rivos.
Nec tamen imbelli subiit fata ultima mente;
Quin magis assurgens, divinaque lumina, Cœlo
Sic propior, vocemque sonoram ad sydera tollens,
Summe Deus, quid me moribundum deseris, & jam
Semianimem, populique tuoque furore fatigas?
Sat tibi, sat mundo dedimus, finitaque dudum
Singula præscriptas habuere oracula metas.
Sic fatur moriens, elataque lumina rursùm
Figit humi, nec jam Cœlum spectare facultas
Ulla datur, cecidere animi, marcentiaque ora
Æthereo vocem extremam fudere parenti:
Hanc tibi, summe parens, animam commendo, nec ultra
Prosiliit, vitamque simul cum voce reliquit.
Haud secùs extremo videas spiramine lychnum
Ingentem nisu valido producere lucem,
Et sursùm elatas, iterum subsidere flammas,
Donec anhelanti similem circumfluus humor
Deserit, & densæ subeunt fuliginis undæ.

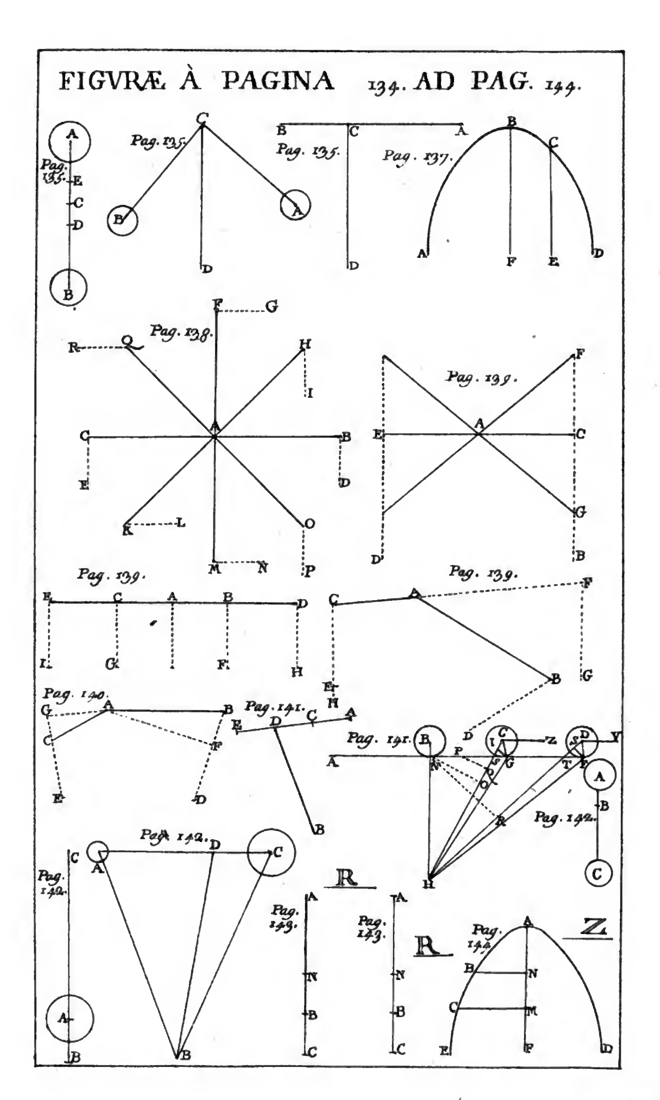
Debilis intereà visa est scintilla per umbras
Semianimes atris miscere vaporibus ignes,
Deficiunt tandem & vano conamine sursùm
Evecti, æternis noctis conduntur in umbris.
Nec tamen æternæ claudent tua lumina noctes,
Nate Deo, veram referet lux tertia lucem,
Et majora dabit renovato lumina mundo.
Quò me, quò, Balzace, rapis? juvat ire per altum
Exemplo quocùnque tuo me musa vocarit,
Exiguo sine te vix suffectura labori;
Scilicet optati venient tanto Auspice versus,
Et quo Pierij frueris super ardua montis
Editus, hoc olim forsan potietur honore
Balzaco proles non inficianda parenti.

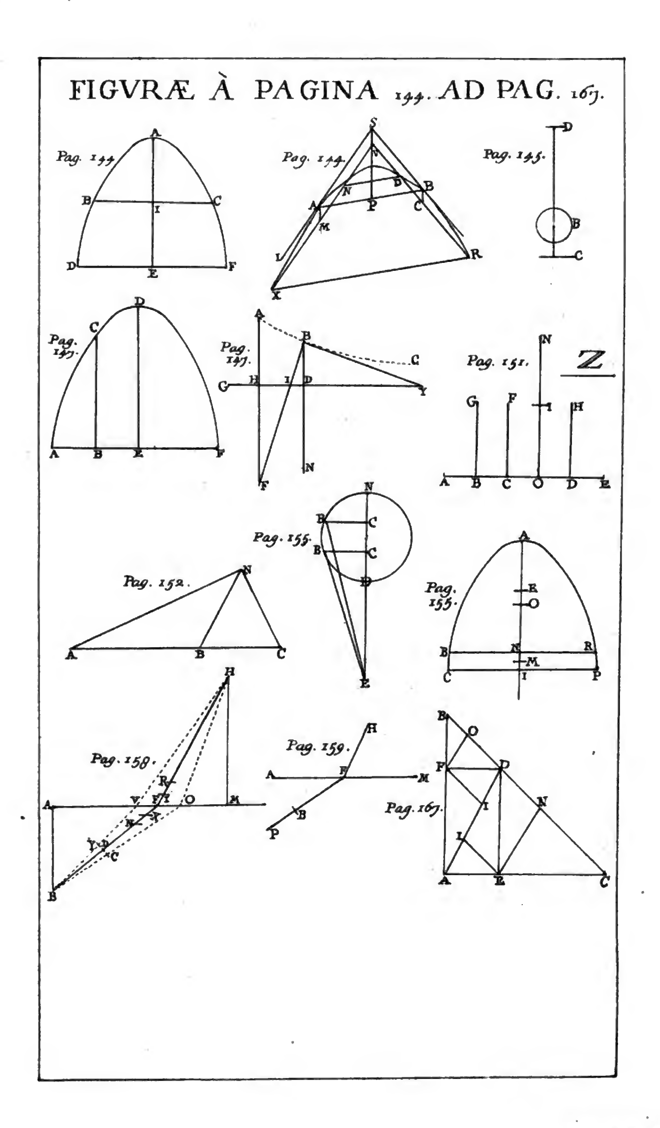



FIGVRÆ À PAGINA 104. AD Pag. 117.
PRÆTER FIG. QVÆ DEEST Pag. 91.
Fig. Pag. 91.
Fig. Pag. 104.
Fig. Pag. 105.
Fig. Pag. 106.
Fig. Pag. 106.
Fig. Pag. 107.
Fig. Pag. 107.
Fig. Pag. 108.
Fig. Porism. I. Pag. 117.


FIGVRÆ À PAGINA 117. AD Pag. 127.
Fig. Porism. 2. Pag. 117.
Fig. Porism. 3. Pag. 117.
Fig. Porism. 4. Pag. 118.
Fig. Porism. 5. Pag. 118.
Fig. Pag. 121.
Fig. Pag. 122.
Fig. Pag. 123.
Pag. 126.
Pag. 125.
Fig. Pag. 126.
Fig. Pag. 126.
Fig. Pag. 127.
Fig. Pag. 127.
Fig. Pag. 127.
Fig. Pag. 127.
Pag. 127.
Pag. 127.


FIGVRÆ À PAGINA 127. AD PAG. 134.
Pag. 128.
Fig. Pag. 128.
Pag. 128.
Pag. 128.
Pag. 128.
Pag. 129.
Pag. 129.
Pag. 130.
Pag. 131.
Pag. 131.
Pag. 131.
Pag. 132.
Pag. 132.
Pag. 132.
Pag. 133.
Pag. 134.
Pag. 134.
Pag. 133.


FIGVRÆ À PAGINA 134. AD PAG. 144.
Pag. 135.
Pag. 135.
Pag. 135.
Pag. 137.
Pag. 138.
Pag. 139.
Pag. 139.
Pag. 139.
Pag. 140.
Pag. 141.
Pag. 141.
Pag. 142.
Pag. 142.
Pag. 142.
Pag. 143.
Pag. 143.
Pag. 144.
R
R
Z


FIGVRÆ À PAGINA 144. AD PAG. 167.
Pag. 144.
Pag. 144.
Pag. 145.
Pag. 147.
Pag. 147.
Pag. 151.
Z
Pag. 155.
Pag. 152.
Pag. 155.
Pag. 158.
Pag. 159.
Pag. 167.





